

OSVALDO DUILIO ROSSI

## IMPORTANZA DEL RISCHIO NELLA CONTRATTAZIONE

## 1. Ipotesi

In un gioco ( $G$ ) statico a somma zero, due giocatori ( $X$  e  $Y$ ) devono decidere come dividersi una certa somma ( $U$ ) e, per farlo, devono collaborare nel tentativo di superare il reciproco disaccordo ( $D$ ).

La soluzione di Kalai-Smorodinsky per questo tipo di problema prevede che  $D \in U$ , ma è valida anche nel caso in cui  $D \notin U$ .

Si procederà all'illustrazione del problema e delle sue soluzioni mediante una serie di esempi.

$X$  pretende 5 Euro ( $u_X = 5$ ) da  $Y$ . Inoltre,  $X$  non accetterà meno di 3 Euro ( $d_X = 3$ ). Dal canto suo,  $Y$  non vuole pagare 5 Euro all'avversario ( $u_Y = 5$ ), ma gliene offre 2 ( $p_Y = 2$ ) preferendo risparmiare 3 Euro ( $d_Y = u_Y - p_Y = 5 - 2 = 3$ ).

Formalizzando e facendo riferimento alla figura 1, con in ascissa i valori pretesi da  $X$  e in ordinata i valori pretesi da  $Y$ :

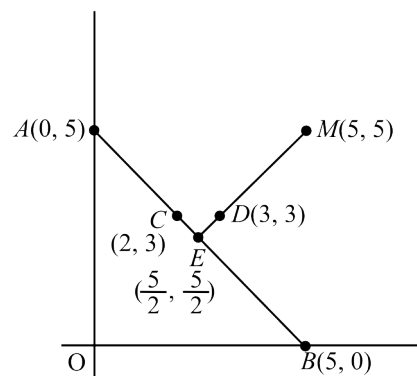


Fig. 1.

$$G = \{U, D\}; D \notin U; U = \{u_X, u_Y\}; D(d_X, d_Y);$$

$$u_X = 5; d_X = 3;$$

$$u_Y = 5; p_Y = 2; d_Y = u_Y - p_Y = 5 - 2 = 3;$$

$M(5, 5)$  è il punto di massima soddisfazione per entrambi i giocatori, ovviamente irraggiungibile poiché i giocatori non possono ottenere entrambi 5 Euro ( $M \notin U$ );

$D(3, 3)$  è il punto di disaccordo comune, a sinistra e al di sotto del quale i giocatori non sono disposti a scambiare;

$AB$  è il vincolo che individua tutte le possibili distribuzioni della somma comprese tra  $A(0, 5)$ , dove  $X$  non ottiene niente perché  $Y$  non paga i 5 Euro, e  $B(5, 0)$ , dove  $X$  ottiene i 5 Euro pagati da  $Y$ . Il vincolo  $AB$  ha Saggio Marginale di Sostituzione (SMS) costante poiché il gioco è a somma zero, infatti ciò che guadagna  $X$  deve necessariamente essere perso da  $Y$ . Inoltre,  $X$  accetta ogni offerta di  $Y$  ( $p_Y^*$ ) tale che  $d_X \leq p_Y^* \leq u_X$ .

$OAB$  è l'area di contrattazione che delimita tutti i possibili scambi. All'esterno di quest'area esistono soluzioni appetibili, come  $D(3, 3)$  e  $M(5, 5)$ , ma irreali poiché di entità superiore alla posta in gioco (per esempio  $3+3 = 6 > 5$ ).

$DM$  è il sentiero che indica i desideri di  $X$  e  $Y$ . Inoltre,  $DM$  giace su una retta infinita che rappresenta tutti i possibili valori di scambio tra i giocatori, ma che oltre il punto  $M(5, 5)$  è irrazionale poiché i vari *payoff* eccedono il  $\max(u_X, u_Y)$ ; che nel tratto  $EM$  è razionale ma irreale poiché i vari *payoff* della retta eccedono la frontiera reale di scambio  $AB$  (infatti  $EM-E \notin U$ ); e che all'interno di  $AB$  è razionale e reale poiché attribuisce risultati non eccedenti il  $\max(u_X, u_Y)$ . Questo vettore rappresenta, quindi, le esigenze dei giocatori in funzione di un SMS costante poiché, essendo il gioco a somma zero, ciò che è guadagnato dall'uno è perso dall'altro.

Essendo il punto di disaccordo  $D(3, 3)$  esterno all'area di scambio  $OAB$ :

- se i giocatori mantengono salde le proprie pretese non ci sarà scambio, quindi si verificherà la soluzione angolare  $A(0, 5)$ ;
- se  $X$  modifica le proprie pretese e accetta l'offerta dell'avversario ( $d_X^* = p_Y$ ) si scambierà in  $C(2, 3)$ ;
- se  $Y$  aumenta l'offerta a 3 Euro ( $p_Y^* = d_X$ ) si scambierà in  $u_X(3, 2)$ , secondo i desideri di  $X$ ;
- se  $Y$  offre una qualsiasi somma  $p_Y^* > d_X$  ovviamente  $X$  accetterà l'offerta;
- se i giocatori collaborano ( $d_X^* < d_X$ ;  $d_Y^* < d_Y$ ) si scambierà in  $E(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ .

Quest'ultima soluzione di equilibrio cooperativo ( $E$ ) è individuata nel punto in cui la retta sulla quale giace il segmento  $DM$  interseca il vincolo  $AB$ , cioè quando i giocatori confrontano le reali possibilità di scambio con le reciproche preferenze.

Essendo noto che per due punti passa una sola retta ( $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ ), l'equazione del vincolo

$AB^1$  è  $x=5-y$  e, similmente,  $D(3, 3)$  e  $M(5, 5)$  individuano la retta<sup>2</sup>  $x=y$ .

Ponendo a sistema le due equazioni si trova il punto d'intersezione  $E(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ .

## 2. Rischio

Se  $Y$  sa che, non riuscendo ad accordarsi con  $X$ , correre il rischio di dover pagare 8 Euro ( $u_Y = 8$ ), pur rimanendo invariate le preferenze di entrambi i giocatori in termini di guadagno e di spesa, la situazione si modifica.

$X$  continua a chiedere 5 Euro ( $u_X = 5$ ) e ad accettarne non meno di 3 ( $d_X = 3$ ).  $Y$ , invece, sa che rischia di perderne 8, ma continua a offrirne 2 ( $p_Y = 2$ ).

Formalizzando:

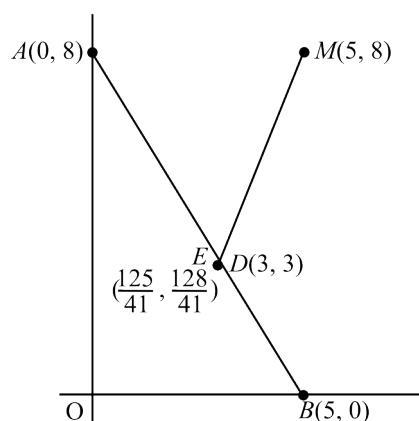


Fig. 2.

$$u_X = 5; d_X = 3;$$

$u_Y = 8; p_Y = 2; d_Y = u_X - p_Y = 5 - 2 = 3$ , specificando che  $d_Y \neq u_Y - p_Y = 8 - 2 = 6$  perché 8 è il rischio corso da  $Y$ , ma la reale richiesta di  $X$  è  $u_X = 5$ , quindi  $Y$  sottrae la propria offerta ( $p_Y = 2$ ) alla pretesa di  $X$  ( $u_X = 5$ ), non al rischio in cui incorre egli stesso ( $u_Y = 8$ );

$M(5, 8)$  è il punto di massima soddisfazione per entrambi i giocatori, ovviamente irraggiungibile;

$D(3, 3)$  è il punto di disaccordo comune, identico al precedente;

---


$$1 \quad \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

$$2 \quad \frac{y - y_D}{y_M - y_D} = \frac{x - x_D}{x_M - x_D}$$

$AB$  è il nuovo vincolo di scambio con equazione  $x = \frac{5y-40}{-8}$  ;

I punti  $D(3, 3)$  e  $M(5, 8)$  giacciono sulla retta  $x = \frac{2y+9}{5}$  .

Ponendo a sistema le equazioni di  $AB$  e della retta dei possibili su cui giace  $DM$  si individua il nuovo equilibrio in  $E(\frac{125}{41}, \frac{128}{41}) > E(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$  .

### 3. Minaccia

Si ipotizzi un nuovo gioco:

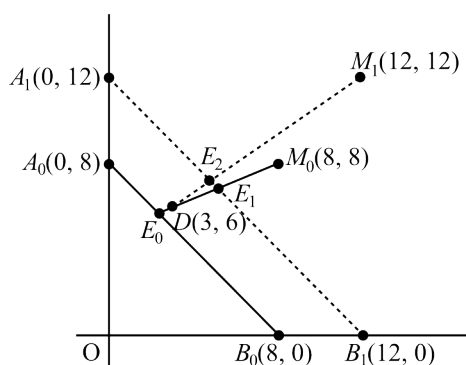


Fig. 3.

$G = \{U, D\}$ ;  $D \notin U$ ;  $U = \{u_x, u_y\}$ ;  $D(d_x, d_y)$ ;

$u_x = 8$ ;  $d_x = 3$ ;

$u_y = 8$ ;  $p_y = 2$ ;  $d_y = 6$ ;

$M_0(8, 8)$ ;

$D(3, 6)$  è il disaccordo esterno al vincolo di scambio  $A_0B_0$ .

Il sistema di equazioni delle rette  $A_0B_0$  e  $DM_0$  (rispettivamente  $y=8-x$  e  $y=\frac{2x-24}{5}$  ) indivi-

dua la soluzione d'equilibrio  $E_0(\frac{16}{7}, \frac{40}{7})$  .

Se però  $Y$  non è disposto a collaborare, restando fermo sul proprio  $d_y = 6$  esterno al vincolo,  $X$  può minacciare, per esempio, di adire le vie legali e di far decidere a un giudice come distribuire la somma, configurando così la possibilità di pretendere e di ottenere 12 Euro. Per cui:

$$u_X = 12; d_X = 3;$$

$u_Y = 12; p_Y = 2; d_Y = 6$ , specificando che  $d_Y = u_Y - p_Y = 8 - 2 = 6 \neq 12 - 2$  perché l'attuale  $u_X = 12$  è solo una minaccia e non un rischio concreto.

$M_0(8, 8)$  poiché  $u_X = 12$  è ancora solo una minaccia;

$D(3, 6)$  è il solito disaccordo, questa volta però interno all'area di possibile scambio con frontiera  $A_1B_1$ .

Il sistema di equazioni delle rette  $A_1B_1$  ( $y = 12 - x$ ) e  $DM_0$  individua la soluzione  $E_1(\frac{36}{7}, \frac{48}{7})$ , favorevole a  $X$ , il quale spinge in questa direzione facendo leva sulla minaccia  $u_X = 12$  e sulla vecchia retta di preferenze  $DM_0$ .

$Y$  però indica a sua volta che il ricorso a un giudice, contemplando un rischio maggiore, modifica l'orizzonte delle possibilità per entrambi i giocatori e, ponendo il nuovo  $M_1(12, 12)$ , individua

$E_2(\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$  tramite il sistema di equazioni delle rette  $A_1B_1$  e  $DM_1$  (con equazione  $y = \frac{6x - 36}{9}$ ).

Ora i giocatori devono scegliere tra  $E_0(\frac{16}{7}, \frac{40}{7})$ ,  $E_1(\frac{36}{7}, \frac{48}{7})$  e  $E_2(\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$ . Il problema risiede nel fatto che, per  $X$ ,  $E_1 > E_2$  ma, per  $Y$ ,  $E_1 < E_2$ .

In forma di matrice:

		$Y$			
		$DM_0$		$DM_1$	
$X$	$u_X = 8$	$\frac{16}{7}$	$\frac{40}{7}$ *	$\frac{12}{5}$	$\frac{28}{5}$
	$u_X = 12$	$\frac{36}{7}$ *	$\frac{48}{7}$	$\frac{24}{5}$ *	$\frac{36}{5}$ *

Fig. 4.

Per completezza d'informazione, nella cella  $u_i(\frac{12}{5}, \frac{28}{5})$  sono segnati i *payoff* corrispondenti a un equilibrio che i giocatori non contemplano realmente.

L'equilibrio di Nash individua  $u_i(\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$  come soluzione cooperativa, cioè  $E_2(\frac{24}{5}, \frac{36}{5})$ . Ciò significa che a  $X$  conviene minacciare ( $u_X = 12$ ) e che a  $Y$  conviene prendere atto di questa minaccia.

#### 4. Conclusioni

Nello stadio iniziale dei giochi esaminati il disaccordo eccede sempre lo spazio di contrattazione ( $D \notin U$ ), ma le minacce mosse dai giocatori modificano la distribuzione dei *payoff* ( $U$ ) in modo che  $D \in U$ . Ciò perché è possibile trovare una soluzione cooperativa solo se il disaccordo sia contemplato come possibile soluzione razionale e reale, cioè come valida base di contrattazione – quando  $D$  assume valori razionali ma irreali, come nel tratto  $EM$  della figura 1, le pretese dei giocatori sono eccessive rispetto allo stato delle cose e non esistono soluzioni realizzabili, a meno che almeno un attore non modifichi il proprio atteggiamento. In panorami simili le minacce dimostrano di essere un incentivo alla cooperazione invece che un impedimento.