Un gioco è una situazione di interdipendenza strategica.
Ogni gioco può essere rappresentato in forma *normale*, in forma di *matrice* o in forma *estesa*.

La **forma normale** è un'espressione che contiene i seguenti valori:

i – un giocatore in esame;
j – l'altro giocatore;
S_i – lo spazio delle strategie del giocatore i;
s_i – una singola strategia dello spazio S_i;
u_i – la funzione dei *payoff* del giocatore i.

G = $\{S_1, S_2, S_3; u_1, u_2, u_3\}$ indica un gioco a 3 giocatori, ognuno dei quali dispone di un certo numero di strategie (S_1, S_2, S_3) e di certi *payoff* (u_1, u_2, u_3) relativi a questi spazi di strategie.
$u_i(s_1'', s_2', s_i')$ significa che il giocatore i otterrà quel risultato (u) se il giocatore 1 adotterà la seconda strategia (s_1''), se il giocatore 2 adotterà la prima strategia (s_2') e se egli adotterà la prima strategia (s_i'), quindi u_i dipende da s_1'', da s_2' e da s_i'.

La **forma di matrice** è una rappresentazione fatta per celle nelle quali vengono inscritti valori (*payoff*) corrispondenti alla combinazione di righe e colonne (che rappresentano le possibili strategie) alle quali queste appartengono. Solitamente si utilizza una bimatrice (due valori per ogni cella) nella quale *il primo valore indica sempre il risultato del giocatore di riga* (Giocatore 1) e *il secondo indica sempre quello del giocatore di colonna* (Giocatore 2). Questa rappresentazione è stata ideata da Thomas Schelling.

		Giocatore 2	
		s_2'	s_2''
Giocatore 1	s_1'	–1 –1	–9 0
	s_1''	0 –9	–6 –6

Nella bimatrice qui presente, per la scelta $u_i(s_1', s_2'')$ il gioco si risolve con i *payoff* $u_1 = –9$, $u_2 = 0$.

La **forma estesa** è verbale e indica:

1) il numero dei giocatori (da 1 a infinito);
2) quando i giocatori hanno diritto alla mossa;
3) cosa possono fare i giocatori quando hanno diritto a muovere;
4) cosa conosce ogni giocatore quando gli spetta una mossa;
5) i *payoff* ricevuti da ciascun giocatore in corrispondenza di ogni combinazione di mosse;
6) il comportamento dei giocatori (razionali, aspiranti alla massima vincita, irrazionali…).

Le **strategie strettamente dominate** portano un risultato maggiore ma rischioso rispetto a strategie che portano un risultato inferiore ma sicuro. Nel gioco rappresentato con la bimatrice precedente, s_1' è strettamente dominata da s_1'' perché il risultato peggiore di s_1' è –9, mentre il peggiore di s_1'' è –6. Quindi $–9 < –6$. Lo stesso vale per S_2: in s_2' il peggior *payoff* è –9 e in s_2'' il peggior *payoff* è –6.
Nessuna credenza di un giocatore, relativa alle strategie degli altri giocatori, rende una strategia dominata una scelta ottima. Per esempio, il fatto che il Giocatore 1 *creda* che l'avversario scelga s_2' (una strategia dominata) non rende s_1' una scelta ottima.

Le **strategie dominanti** pongono un giocatore in una condizione migliore di quella in cui sarebbe se avesse scelto qualsiasi altra strategia poiché evitano al giocatore di incappare nel peggior risultato ottenibile.

Il risultato che ogni giocatore razionale mira ad ottenere è quello utile a raggiungere una situazione che garantisce una vincita minima per ogni comportamento adottato dagli altri giocatori, anche tralasciando il miglior risultato raggiungibile: tale situazione è denominata *punto di sella*. Questo risultato si raggiunge *attraverso l'adozione di strategie non dominate*.

GIOCHI STATICI CON INFORMAZIONE COMPLETA

I giocatori scelgono simultaneamente le azioni per una singola mossa e il criterio di assegnazione del risultato è noto a tutti.

Il **dilemma del prigioniero** è un gioco a due giocatori in cui a ciascuno è data la possibilità di cooperare o di defezionare. Ogni giocatore non sa se può fidarsi dell'altro. Il gioco rispetta l'rodine di grandezze $A > B > C > D$ che soddisfano la disuguaglianza $B > \frac{A+D}{2}$ per cui:

A è il risultato di chi defeziona al cooperare dell'altro;
B è il risultato della cooperazione reciproca;
C è il *payoff* conseguito alla defezione di entrambi;
D è la penalità ricevuta da chi coopera al defezionare altrui.

Due individui vengono arrestati perché sospettati di aver commesso un crimine. In attesa della loro deposizione, vengono messi in celle separate e viene spiegato loro (informazione completa) che se nessuno dei due confessa (cooperazione) verrà comminata ad entrambi una pena di *1 mese* di reclusione; se entrambi confessano (defezione) dovranno scontare *6 mesi* di reclusione; se uno confessa e l'altro no, chi ha confessato verrà messo in libertà, mentre l'altro dovrà scontare *9 mesi* di reclusione. Sono dunque proposte ai giocatori due possibili strategie: S_i = {Tacere, Parlare}.

		Prigioniero 2	
		Tacere	Parlare
Prigioniero 1	Tacere	–1 –1	–9 0
	Parlare	0 –9	–6 –6

Se il *Prigioniero 1 sceglie di tacere* e il *Prigioniero 2 sceglie di parlare*, il risultato che otterrà il primo saranno *9 mesi* di reclusione mentre il secondo giocatore verrà *liberato*: la casella Tacere di 1 e Parlare di 2 riporta i valori –9 e 0.

La strategia Tacere è dominata dalla strategia Parlare, infatti l'adozione di Tacere comporta il rischio del risultato –9 nel caso in cui l'altro parli. Parlare domina su Tacere perché ogni giocatore che scelga di parlare non rischierà il *payoff* –9.

s_i' è strettamente dominata da s_i'' se, per ogni combinazione di strategie dell'altro giocatore (s_j), il *payoff* che riceve i giocando s_i' è inferiore a quello che riceve giocando s_i'':

$$u_i(s_i', s_j) < u_i(s_i'', s_j).$$

Due giocatori razionali risolveranno il gioco in u_i(P, P), Parlare–Parlare, cioè si tradiranno a vicenda perché sarebbe irrazionale Tacere *credendo* che l'altro giocatore sceglierà di Tacere.

Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

		Giocatore 2		
		Sinistra	Centro	Destra
Giocatore 1	Alto	1 0	1 2	0 1
	Basso	0 3	0 1	2 0

Nel presente esempio, il Giocatore 1 non ha strategie dominanti, infatti sia Alto che Basso possono procurare 0 (che è il *payoff* peggiore). Per il Giocatore 2, invece, la strategia Destra è dominata da Centro: 0_2(B, D) < 1_2(B, C). Sapendo che il 2 è un giocatore razionale, il Giocatore 1 può scartare la strategia Destra del Giocatore 2, poiché dominata, e semplificare la bimatrice in questo modo:

		Giocatore 2	
		Sinistra	Centro
Giocatore 1	Alto	1 0	1 2
	Basso	0 3	0 1

Ora, per il Giocatore 1 la strategia Basso è dominata da Alto: 0_1(B, (S, C)) < 1_1(A, (S, C)). Essendo il Giocatore 1 razionale, il Giocatore 2 può escludere Basso dal gioco dell'avversario:

		Giocatore 2	
		Sinistra	Centro
Giocatore 1	Alto	1 0	1 2

Ora, per il Giocatore 2 la strategia Sinistra è dominata da Centro: 0_2(A, S) < 2_2(A, C). Il gioco si risolve in u_i(Alto, Centro), cioè $u_i(s_1', s_2'')$.

Questo gioco si svolgerà così se entrambi i giocatori sono razionali, se sono informati della razionalità dell'altro e se sanno che l'altro possiede questa informazione (*conoscenza comune*).

Equilibrio di Nash

In $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, le strategie $(s_1^e, ..., s_n^e)$ sono un equilibrio di Nash se s_i^e è la miglior risposta del giocatore i alle strategie specificate per gli altri n–1 giocatori (tutti i giocatori tranne i).

$$u_i(s_1^e, ..., s_{i-1}^e, s_i^e, s_{i+1}^e, ..., s_n^e) \geq u_i(s_1^e, ..., s_{i-1}^e, s_i, s_{i+1}^e, ..., s_n^e)$$

significa che per ogni giocatore la strategia prescritta (s_i^e) deve essere la miglior risposta di quel giocatore alle strategie prescritte per gli altri giocatori ($s_1^e, ..., s_{i-1}^e, s_{i+1}^e, ..., s_n^e$), ossia deve essere la migliore tra tutte le sue altre strategie disponibili ($s_i^e \geq s_i$) – *predizione autovincolante*.

In un gioco a due giocatori, l'equilibrio di Nash si individua quando

$$u_i(s_i^e, s_j^e) \geq u_i(s_i, s_j^e).$$

Per ogni giocatore e per ogni strategia di quel giocatore *si determina la miglior risposta dell'avversario* marcando il relativo *payoff* nella bimatrice. L'equilibrio di Nash si individua nella casella che riporta entrambi i risultati marcati.

		Prigioniero 2	
		Tacere	Parlare
Prigioniero 1	Tacere	–1 –1	–9 **0**
	Parlare	**0** –9	**–6** **–6**

Per il Tacere di 1, a 2 conviene Parlare: $0_2(T, P) > -1_2(T, T)$; per il Parlare di 1, a 2 conviene Parlare: $-6_2(P, P) > -9_2(P, T)$; a 1 conviene Parlare per il Tacere di 2: $0_1(P, T) > -1_1(T, T)$; per il Parlare di 2, a 1 conviene Parlare: $-6_1(P, P) > -9_1(T, P)$. L'equilibrio di Nash si individua nella casella Parlare–Parlare, dove entrambi i *payoff* risultano marcati.

	S	C	D
A	0 **4**	**4** 0	5 3
M	**4** 0	0 **4**	5 3
B	3 5	3 5	**6** **6**

In questa bimatrice 3x3, l'eliminazione iterata non produce alcun risultato poiché non vi sono strategie dominate, mentre l'equilibrio di Nash indica la u_i(B, D) come soluzione del gioco.

Se le strategie (s_1^e, … s_n^e) sono un equilibrio di Nash allora sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie dominate. Non è vero il contrario, cioè che ogni risposta sopravvissuta all'eliminazione iterata di strategie dominate sia un equilibrio di Nash.

In ogni gioco finito (con numero di giocatori e numero di strategie finiti) esiste un equilibrio di Nash.

Se in un gioco la teoria delle strategie dominate indica una soluzione che non è un equilibrio di Nash, almeno un giocatore sarà tentato di non adottare l'eliminazione iterata di strategie dominate, la quale risulterà falsificata dall'effettivo svolgimento del gioco.

Giochi a somma zero

Sono quei giochi in cui la vincita di un attore equivale alla perdita dell'altro. Nei giochi a somma zero non esiste alcun equilibrio di Nash poiché ogni giocatore nutre incertezza su ciò che faranno gli altri giocatori.

Prendiamo l'esempio di due pugili, formalizzato nella seguente bimatrice. Il primo pugile deve scegliere con quale pugno attaccare, mentre il secondo deve scegliere con quale braccio difendersi dall'attacco che scaglierà il primo.

		Difesa	
		SX	DX
Attacco	SX	–1 **1**	**1** –1
	DX	**1** –1	–1 **1**

Il secondo pugile può parare se prevede da quale direzione arriverà l'attacco (destra o sinistra): la Difesa riesce se $s_1 = s_2$ ($s_1 – s_2 = 0$, quindi *a somma zero*) e, viceversa, l'attacco riesce se se $s_1 \neq s_2$. Gli interessi dei giocatori sono contrapposti.

Maximin e minimax

Nei giochi a somma zero si determina l'equilibrio mediante un "tacito accordo" tra i giocatori. Visto che ciò che vince uno è perso dall'altro, i accetta di minimizzare la vincita affinché j possa minimizzare la perdita.

Maximin: i individua i propri peggiori *payoff* per ogni s_i e seleziona la s_i^* che assegna il migliore, stabilendo il massimo dei propri risultati minimi.

Minimax: j individua i migliori *payoff* di i per ogni s_j e seleziona la s_j^* che assegna il più basso, stabilendo il minimo dei risultati massimi di i.

	A	C	B	*maximin*
A	2	4	6	**2**
C	1	7	0	0
B	1	0	7	0
minimax	**2**	7	7	

Ciò che vince Riga, lo perde Colonna: per esempio a 1_R(C, A) corrisponde -1_C(C, A).

Riga sceglie 2 come *maximin* (2 > 0) e Colonna sceglie 2 come *minimax* (2 < 7).

Strategie miste

Una strategia mista è la distribuzione di probabilità su un insieme di strategie pure:

$$v_i(p, 1-p); \qquad v_j(q, 1-q).$$

1 rappresenta il 100% di possibilità che j giochi una strategia, mentre 0 rappresenta l'impossibilita che quella strategia venga giocata; q è la percentuale di probabilità che sia giocata s_j'; $1-q$ è la percentuale restante del verificarsi di s_j'' (il 100% a cui è sottratta la percentuale q). Per esempio: la strategia mista (1, 0) è la strategia pura s_j'. Sempre $0 \leq q \leq 1$.

Se $S_j = \{s_j', s_j'', s_j'''\}$, la strategia mista di i sarà $(q, r, 1-q-r)$. Con $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ si attribuisce alle tre strategie di S_j la stessa probabilità (infatti $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$). Con $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ si esclude s_j'' e si assegna a s_j' una probabilità maggiore rispetto a s_j''' ($\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$).

$$v_i(p_i^e, q_j^e) \geq v_i(p_i, q_j^e); \qquad v_j(p_i^e, q_j^e) \geq v_j(p_i^e, q_j).$$

Le strategie miste (p_i^e, q_j^e) sono un equilibrio di Nash se la strategia mista di ogni giocatore è la risposta migliore alla strategia mista dell'avversario.

L'equilibrio in strategie miste è $v_i(p, q)$, cioè la distribuzione di probabilità su s_i' e s_j'.

Giocatore 2

		q		$1-q$	
Giocatore 1	p	x_1	w_1	y_1	w_2
	$1-p$	x_2	z_1	y_2	z_2

Facendo riferimento a questa bimatrice simbolica, le condizioni di efficacia per il Giocatore 1 sono:

$$qx_1+(1-q)y_1 > 0$$

per scegliere s_1' (cioè p)

$$qx_2+(1-q)y_2 > 0$$

per sceliere s_1'' (cioè $1-p$)

s_1' domina s_1'' quando:

$$qx_1+(1-q)y_1 > qx_2+(1-q)y_2.$$

Visto che il Giocatore 1 è indifferente tra s_1' e s_1'' (infatti si affida a una strategia mista), allora:

$$p = 1-p,$$

ed essendo $p = qx_1+(1-q)y_1$ e $1-p = qx_2+(1-q)y_2$, per determinare q atteso dal Giocatore 1 si risolve la seguente equazione:

$$\boldsymbol{qx_1+(1-q)y_1 = qx_2+(1-q)y_2}.$$

Lo stesso dicasi per p, che si determina risolvendo l'equazione:

$$\boldsymbol{pw_1+(1-p)z_1 = pw_2+(1-p)z_2}.$$

Il Giocatore 2 attende dal proprio gioco, in funzione del gioco avversario, i due valori:

$$v = qw_1+(1-q)w_2 \qquad \text{e} \qquad v = qz_1+(-q)z_2.$$

Riportando le due equazioni in un sistema di assi cartesiani, con in ascissa q e in ordinata v, l'intersezione delle rette indicherà il valore di q. (Se dovessero figurare più rette perché il giocatore dispone di più di due strategie, sarà considerata l'intersezione tra le rette con coefficiente più basso). Quindi, si mettono a sistema le due equazioni.

Il *payoff* atteso dal Giocatore 2 (la media ponderata dei suoi risultati) è:

$$pqw_1+[p(1-q)]w_2+[(1-p)q]z_1+[(1-p)(1-q)]z_2 =$$
$$= pqw_1+(p-pq)w_2+(q-pq)z_1+(1-p-q+pq)z_2.$$

In questa espressione si evidenzia p e si risolve l'equazione tra parentesi di $q = 0$.

Il *payoff* atteso dal Giocatore 1 che giochi (p, $1-p$), quando l'avversario gioca (q, $1-q$), si calcola nel seguente modo:

$$pqx_1+[p(1-q)]y_1+[(1-p)q]x_2+[(1-p)(1-q)]y_2 =$$
$$= pqx_1+(p-pq)y_1+(q-pq)x_2+(1-p-q+pq)y_2,$$

si evidenzia q e si risolve l'equazione tra parentesi di $p = 0$.

		Difesa SX		Difesa DX	
Attacco	SX	–1	1	1	–1
	DX	1	–1	–1	1

In questo gioco dei pugili, privo di equilibrio di Nash, Attacco suppone che Difesa giocherà una strategia mista (q, $1–q$), ossia che Difesa giocherà SX con probabilità q. Quindi:

$$q(-1)+(1-q)(1) = q(1)+(1-q)(-1);$$

$$p(1)+(1-p)(-1) = p(-1)+(1-p)(1).$$

Sviluppando le equazioni si ottengono rispettivamente: $q=\frac{1}{2}$ e $p=\frac{1}{2}$, che equivalgono a dire:

per SX di Difesa:

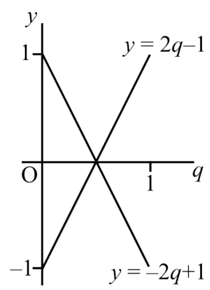
$$q(1)+(1-q)(-1) =$$
$$q-1+q =$$
$$2q-1$$

per DX di Difesa:

$$q(-1)+(1-q)1 =$$
$$-q+1-q =$$
$$-2q+1$$

Si riportano sul piano cartesiano $y = 2q–1$ e $y = –2q+1$. Il sistema delle due equazioni indica l'intersezione delle rette:

$$\begin{cases} y=2q-1 \\ y=-2q+1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2q-1=-2q+1 \\ y=y \end{cases} \quad \begin{cases} 4q=2 \\ y=y \end{cases} \quad \begin{cases} q=\frac{1}{2} \\ y=y \end{cases}$$



Il punto d'intersezione delle rette individua $q=\frac{1}{2}$.

Le condizioni di efficacia sono:

per SX di Attacco:

$$q(-1)+(1-q)1 =$$

per DX di Attacco:

$$q(1)+(1-q)(-1) =$$

$$-q+1-q =$$
$$1-2q$$

$$-2q > -1$$
$$1-2q > 0$$
$$2q < 1$$
$$q<\frac{1}{2}\ .$$

$$q+q-1 =$$
$$2q-1$$

$$2q-1 > 0$$
$$2q > 1$$
$$q>\frac{1}{2}\ .$$

Attacco sceglie SX solo se $q<\frac{1}{2}$ (cioè se Difesa sceglie SX con probabilità inferiore al 50%).

Attacco sceglie DX solo se $q>\frac{1}{2}$ (cioè se Difesa sceglie SX con probabilità superiore al 50%).

Per $q=\frac{1}{2}$ il pugile che attacca è indifferente a tutte le strategie pure e miste.

Essendo $q=\frac{1}{2}$, Attacco sceglierà a caso.

Calcolando il *payoff* atteso da Difesa si ha:

$$pq\cdot(1)+(p-pq)\cdot(-1)+(q-pq)\cdot(-1)+(1-p-q+pq)\cdot(1) =$$
$$= pq-p+pq-q+pq+1-p-q+pq =$$
$$= 4pq-2p-2q+1 =$$
$$= q(4p-2)-2p+1.$$

Risolvendo l'equazione di p:

$$4p-2 = 0$$
$$4p = 2$$
$$p=\frac{1}{2}\ .$$

Difesa si aspetta di riuscire il 50% delle volte.

Giochi dinamici con informazione completa e perfetta

L'azione da compiere dipende dalla scelta fatta precedentemente dall'avversario. Ogni azione che è possibile compiere, tranne quella che ha dato inizio al gioco, fa parte di un sottogioco.

Un sottogioco è una parte di un gioco; più precisamente è la parte che rimane da giocare di un gioco: è un gioco che comincia ad un punto del gioco originario e che comprende tutte le mosse che portano al termine del sottogioco (che coincide col termine del gioco).

Un gioco dinamico è composto da più sottogiochi.

La dinamica più elementare si sviluppa come segue:

1) il Giocatore 1 sceglie un'azione a_1 dall'insieme A_1;
2) il Giocatore 2 osserva a_1 e poi sceglie un'azione a_2 dall'insieme A_2;
3) i *payoff* sono $u_1(a_1, a_2)$ e $u_2(a_1, a_2)$.

In un gioco dinamico, la strategia di ogni giocatore indica le azioni che il giocatore adotterà nel primo stadio del gioco e nel primo stadio di ogni sottogioco.

<u>Induzione a ritroso</u> (*backwards induction*)

Al secondo di tre stadi di un gioco, il problema del Giocatore 2 è:

$$\max u_2(a_1, a_2),$$

determinare il massimo risultato (max u_2) dipendente dall'azione compiuta dall'avversario (a_1) e da quella che egli stesso dovrà compiere (a_2).

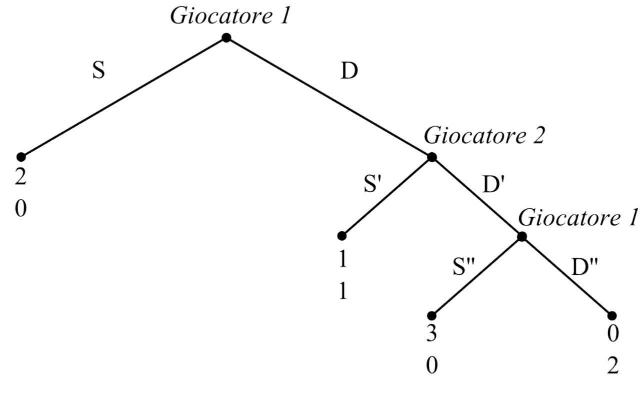
Entrambi i giocatori sono in grado di determinare la *reazione* (risposta ottima) $R_2(a_1)$ del Giocatore 2 poiché c'è conoscenza comune, quindi il Giocatore 1 può anticipare la reazione dell'avversario e *nel primo stadio del gioco* dovrà risolvere il problema:

$$\max u_1(a_1, R_2(a_1)),$$

determinare il massimo risultato (max u_1) dipendente dall'azione che egli sta per compiere (a_1) e dalla reazione (già prevista) che avrà l'avversario ($R_2(a_1)$).

La soluzione a questo problema è a_1^e.

L'esito di *backwards induction* è (a_1^e, $R_2(a_1^e)$).



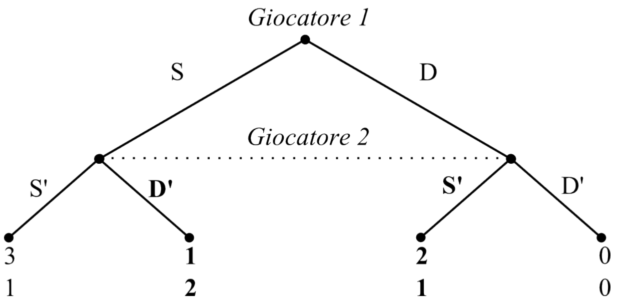
Nell'albero i giocatori scelgono a turno l'azione da compiere (Destra o Sinistra); il primo numero riportato sotto la strategia scelta è il risultato conseguito dal primo giocatore e quello che segue è il risultato conseguito dal secondo giocatore.

Al terzo stadio il Giocatore 1 (alla sua seconda mossa) può scegliere tra i risultati 3_1((D, S''), D') e 0_1((D, D''), D'), dove S'' è la mossa dominante perché evita il *payoff* 0.

Al secondo stadio il Giocatore 2 prevede che, se il gioco raggiunge il terzo stadio, il Giocatore 1 giocherà S'' che comporta il risultato 0 per il Giocatore 2. Perciò la scelta del Giocatore 2 al secondo stadio sarà S' per evitare che il gioco raggiunga il terzo stadio.

Al primo stadio il Giocatore 1 prevede che, se il gioco raggiunge il secondo stadio, il Giocatore 2 giocherà S’ che equivale ad un *payoff* di 1 per entrambi. Essendo il risultato 1_1(D, S’) < 2_1(S) il Giocatore 1 giocherà S al primo stadio concludendo il gioco.

Un equilibrio di Nash è perfetto nei sottogiochi se le strategie dei giocatori costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sottogioco.



Nell’esempio di quest’altro albero, il Giocatore 1 prevede che il Giocatore 2 giocherà D’ come risposta ad S e che giocherà S’ come risposta a D, quindi preferirà giocare D poiché il risultato 1_1(S, D’) < 2_1(D, S’). L’esito di *backwards induction* è u_i(D, S’).

Qui l’equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi è (D, (D’, S’)): l’equilibrio del Giocatore 1 è e_1(D) e quello del Giocatore 2 è e_2(D’, S’), cioè una strategia completa per il giocatore 2 che prevede un equilibrio anche nel sottogioco in cui 1 sceglie S.

<u>Il dilemma del prigioniero: pan per focaccia</u> (*tit for tat*)

Il dilemma del prigioniero giocato per un numero stabilito di turni si riduce ad un semplice gioco statico perché, nonostante un’ipotetica cooperazione continuata, all’ultimo turno i giocatori preferiscono defezionare come in un gioco statico, trasformando l’ultimo turno del gioco dinamico nell’unico turno di un gioco statico; trasformando quindi il penultimo turno per evitare il tradimento all’ultimo e così via, riducendo inesorabilmente l’esito dell’intero gioco dinamico nella sommatoria degli esiti di un gioco statico.

Se però la durata del gioco non è specificata, rimane aperta l’eventualità di mantenere viva la cooperazione per ottenere nel futuro (indefinito) il miglior risultato.

La strategia dinamica più vantaggiosa in questi casi è quella definita *Tit for tat*, Pan per focaccia (presentata dal Prof. Anatol Rapoport in occasione del torneo informatico sul dilemma del prigioniero indetto da Robert Axelrod nel 1984), che consiste nel cooperare alla prima mossa, per evitare ogni inutile conflitto, e procedere imitando le mosse dell’avversario, quindi non collaborando ogni volta che l’altro defeziona e tornando a collaborare non appena l’altro torni a collaborare.

Quando il gioco non ha un termine prestabilito, al giocatore che si trova a dover rispondere alla strategia Pan per focaccia conviene collaborare. Se osserviamo i primi 5 turni di un gioco del dilemma del prigioniero in cui il primo giocatore adotta la strategia *Tit for tat* e il secondo giocatore defeziona sempre (Tutto D), sommando i 5 risultati conseguiti dal Secondo giocatore otteniamo un totale di 0–6–6–6–6 = –24 punti. Se invece il Secondo giocatore scegliesse Parlare al primo turno e successivamente collaborasse sempre, sommando i risultati si ottiene un totale di 0–9–1–1–1 = –12 punti. Se il Secondo giocatore scegliesse di Parlare al primo turno, di Tacere per i due turni successivi e nuovamente di Parlare per gli ulteriori due turni successivi (cercando un risultato individuale), si hanno 0–9–1+0–6 = –16 punti.

Il giocatore che non adotta la strategia Pan per focaccia ottiene il miglior risultato solo collaborando (–12 è il migliore dei tre risultati) e ottiene il massimo risultato iniziando a collaborare sin dal primo turno (–1–1–1–1–1 = –5) anziché tentare la defezione alla prima mossa.

La forza di Colpo su colpo non è tanto nel valore del risultato che arriva ad ottenere, quanto nella sua capacità di stimolare la cooperazione.

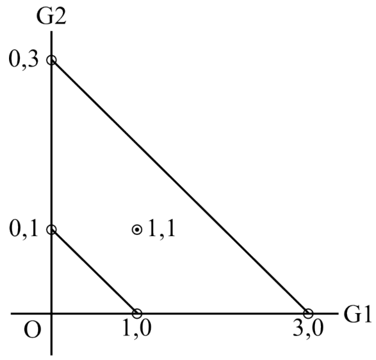
INCERTEZZA

Quando un giocatore non ha informazione perfetta e non sa quale di più giochi sta giocando, può individuare lo spazio della partita riportando le combinazioni dei propri *payoff* in un piano cartesiano.

Quando un giocatore non è in grado di stabilire quale valore numerico attribuire ad alcuni *payoff*, e posto che tale valore sia compreso in un intervallo con estremi noti ($n < x < m$), è possibile dire che il giocatore è indeciso tra due giochi di estremo.

G1	s_2'			
s_1'	0	1	1	3
	0	1	0	3

G2	s_2'			
s_1'	3	0	1	0
	3	1	1	0



Il sistema cartesiano individua lo spazio d'incertezza generato dai *payoff* corrispondenti ad ogni coppia di strategie (s_1, s_2) previsti per i due giochi. Per esempio, nel grafico, (0, 3) è il punto in cui il giocatore ottiene 0_i(s_1', s_2') in G1 e 3_i(s_1', s_2') in G2 – ogni cella indica solo il *payoff* del giocatore interessato (i).

La comparazione delle matrici sul piano cartesiano genera una nuova bimatrice:

G1, 2	s_2'	…	…	…
s_1'	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)	(3, 0)
…	(0, 3)	(1, 1)	(0, 1)	(3, 0)

che può essere affrontata come un consueto gioco per individuare eventuali equilibri e dominanze, tenendo presente che non ci sono due giocatori i e j, ma due giochi per uno stesso giocatore i.

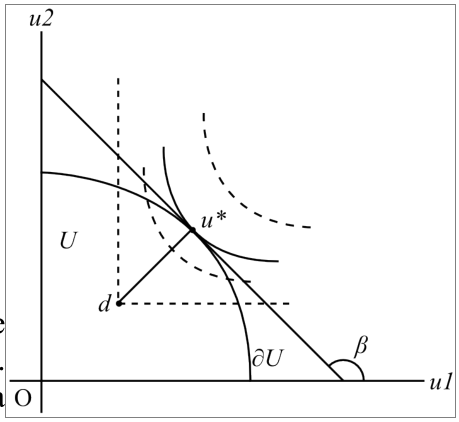
Individuate in un grafico le proprie strategie di sicurezza, un giocatore può stabilire quali ipotesi scartare dalle matrici, restringendo quindi lo spazio d'incertezza. A tal fine, il giocatore i deve considerare che l'avversario, a conoscenza del gioco in atto, cerca di ottenere i risultati più vantaggiosi per se stesso.

Se quello nell'esempio fosse un gioco a somma zero, in cui la vincita di i comporta la perdita di j, dopo alcuni turni i saprebbe che il risultato ottenuto è per j il più conveniente, quindi potrebbe determinare quale gioco tra G1 e G2 sia quello reale.

Dopo una serie di n turni, il giocatore i individua le combinazioni (x_1, y_1), (x_2, y_2) … (x_n, y_n) con massimo risultato (x^*, y^*) = $[(\frac{1}{n})(x_1+x_2+\ldots+x_n),(\frac{1}{n})(y_1+y_2+\ldots+y_n)]$.

Contrattazione

Prodotto di Nash

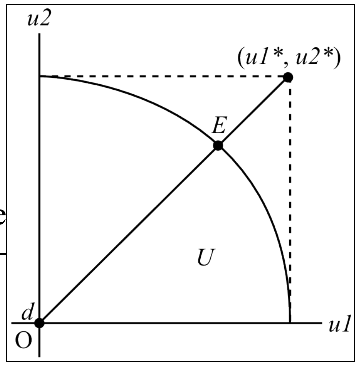


Gioco cooperativo di contrattazione a due giocatori:

$$(U, d);\ d \in U.$$

U: insieme delle vincite u_1 e u_2;
d: disaccordo.
$f(U, d) = \max\ (u_1–d_1)(u_2–d_2)$: *massimo del prodotto di Nash*.
Il prodotto di Nash $(u_1–d_1)(u_2–d_2)$ genera una serie di curve (d'indifferenza) rispetto a un sistema di assi con origine in d. L'accordo è nel punto di tangenza u^* di una delle curve con la frontiera (massimo) ∂U dell'area di contrattazione U.
$tg\beta = (u_2^*–d_2)/(u_1^*–d_1)$.

Equilibrio Kalai-Smorodinsky



Gioco cooperativo di contrattazione a due giocatori:

$$(U, d);\ d \in U.$$

Il vettore che congiunge il punto di disaccordo d con il punto dei due massimi (u_1*, u_2*), esterno all'area di contrattazione U, individua l'equilibrio sulla frontiera di scambio (massimo contrattabile).

Oligopolio

(Sono necessarie le nozioni di microeconomia su Domanda e Offerta e sulle variabili dell'attività d'impresa – Prodotto, Costo, Ricavo, Profitto e Perdita).

Equilibrio di Cournot (duopolio)

Due imprese identiche devono decidere simultaneamente quanto Q_i produrre. Ogni impresa reagisce alla funzione di produzione ipotizzata per l'altra. La quantità prodotta è $Q = Q_1+Q_2$.

$R_1 = P_D Q_1$ (si moltiplica la funzione di domanda del mercato (P_D) per l'incognita Q_1);

$R'_1 = \dfrac{\Delta R_1}{\Delta Q_1}$ (R'_1 è la derivata* di R_1);

$R'_1 = C'_1 \rightarrow$ si esplicita l'equazione per Q_1^{Cournot} (Q_2^{Cournot} è speculare** a Q_1^{Cournot});

* La derivata indica come varia Q_i nella funzione di R_i. Se, p. es., $R_1 = 15Q_1+4Q_1^2+9Q_2Q_1 \rightarrow R'_1 = 15+4(2Q_1)+9Q_2$. Si ricorda che $f'(x^n) = nx^{n-1}$.

si risolve l'equazione di Q_1^{COURNOT} esplicitando Q_2;

si pone $Q_2 = Q_2^{\text{COURNOT}}$ e si esplicita Q_1 per conoscere il relativo valore numerico;

$Q = 2Q_1$ perché Q_2 è speculare a Q_1 e $Q = Q_1+Q_2$;

P_D si ottiene sostituendo Q nella funzione di domanda di mercato.

<u>Collusione nel modello di Cournot</u>

Due imprese scelgono Q_i per massimizzare il PT e si spartiscono equamente il mercato.

$R=P_D Q$ (si moltiplica la funzione di domanda del mercato (P_D) per l'incognita Q);

$R'=\dfrac{\Delta R}{\Delta Q}$ (R' è la derivata di R);

$R'=C'$ $\rightarrow$ si esplicita l'equazione per Q;

qualsiasi combinazione di $Q_1+Q_2 = Q$ massimizza il PT $\rightarrow$ $Q_1=Q_2=\dfrac{Q}{2}$;

nella curva di domanda del mercato si sostituisce Q e si esplicita P_D.

<u>Equilibrio di Stackelberg</u> (duopolio)

Tra due imprese identiche, una (*leader*) deve decidere quanto produrre prima che l'altra prenda una decisione.

L'impresa 1 (*leader*) prevede che l'altra reagirà con Q_2^{COURNOT} $\rightarrow$ in R_1 si sostituisce Q_2^{COURNOT} a Q_2;

$R'_1=\dfrac{\Delta R_1}{\Delta Q_1}$ $\rightarrow$ $R'_1=C'_1$ $\rightarrow$ si esplicita l'equazione per $Q_1^{\text{STACKELBERG}}$;

si sostituisce $Q_1^{\text{STACKELBERG}}$ in Q_2^{COURNOT} per ottenere il valore numerico di Q_2;

$Q = Q_1+Q_2$ $\rightarrow$ si sostituisce Q nella funzione di domanda e si esplicita P_D.

<u>Equilibrio di Bertrand</u> (duopolio)

Due imprese identiche scelgono i prezzi $P_1 = P_2 = C'_1 = C'_2$, realizzando profitti nulli.

** Se, p. es., $Q_1=\dfrac{30+2Q_2}{6}$ $\rightarrow$ $Q_2=\dfrac{30+2Q_1}{6}$ perché, nel modello di Cournot, le imprese sono identiche.

Bibliografia

Aumann Robert J. e Maschler Michael B., *Repeated games with incomplete information*, London, MIT Press, 1995.

Axelrod Robert, *Giochi di reciprocità. L'insorgenza della cooperazione*, Milano, Feltrinelli, 1985; ed. or., *The evolution of cooperation*, 1984.

Costa Giacomo e Mori P. Angelo, *Introduzione alla teoria dei giochi*, Bologna, Il Mulino, 1994.

Crawford Vincent, *Lecture notes for economics 200C: games and information*, San Diego, University of California, 2000, http://weber.ucsd.edu/%7Evcrawfor/200CLectureNotes.pdf.

Festa Roberto, *Teoria dei giochi e strategie della deterrenza*, in *L&PS. Logic and philosophy of science. An electronic journal*, vol. 2, n. 1, Trieste, Università di Trieste, 2004, http://www.univ.trieste.it/~ episteme.

Gibbons Robert, *Teoria dei giochi*, Bologna, Il Mulino, 1994; ed. or., *A primer in game theory*, 1992.

Lucchetti Roberto, *Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi*, Milano, Paravia Bruno Mondadori, 2001.

Luce Robert Duncan e Raiffa Howard, *Games and decisions*, New York, John Wiley & Sons, 1957.

Odifreddi Piergiorgio, *Giochi pericolosi*, Torino, Università di Torino, 1995, http://www.vialattea.net/odifreddi/giochi.pdf.

Rasmusen Eric, *Teoria dei giochi e informazione*, Milano, Hoepli, 1993; ed. or., *Games and information*, 1989.

Schelling Thomas Crombie, *La strategia del conflitto*, Milano, Paravia Bruno Mondadori, 2006; ed. or., *The strategy of conflict*, 1960, 1980.

Von Neumann John e Morgenstern Oskar, *Theory of games and economic behaviour*, Princeton, Princeton University Press, 1944.