

ALGEBRA

SEGNI

$$x-y = 0 \leftrightarrow x = y \qquad x-y > 0 \leftrightarrow x > y \qquad x-y < 0 \leftrightarrow x < y \qquad -x > y \leftrightarrow x < -y$$

$$(x)(y) = z \qquad (-x)(-y) = z \qquad (x)(-y) = -z \qquad \frac{x}{y} = z \qquad \frac{x}{-y} = -z$$

MOLTIPLICAZIONI

$$(a+b+c)m = am+bm+cm \qquad (a+b)(c+d+m) = ac+ad+am+bc+bd+bm$$

DIVISIONI

$$\frac{a}{b} = c \leftrightarrow cb = a \qquad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad a \frac{b}{a} = b \qquad \frac{a}{b} = a \frac{1}{b}$$

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \frac{abc}{m} = \frac{a}{m}bc = a \frac{b}{m}c = ab \frac{c}{m} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

MASSIMO COMUN DIVISORE

Termini comuni col più piccolo esponente.

	<i>numero</i>	<i>:</i>	<i>divisore minimo</i>		<i>numero</i>	<i>:</i>	<i>divisore minimo</i>	
	8	<i>:</i>	2		20	<i>:</i>	2	
$MCD(8, 20) \rightarrow$	4	<i>:</i>	2	$2^3;$	10	<i>:</i>	2	$2^2 \cdot 5 \cdot 1 \rightarrow MCD(8, 20) = 2^2.$
	2	<i>:</i>	2		5	<i>:</i>	5	
	1	<i>:</i>	1		1	<i>:</i>	1	

$$MCD(a, b) \rightarrow \frac{a}{b} = c, w_{resto} \rightarrow \frac{b}{w} = c_1, w_1 \dots \frac{w_{n-1}}{w_n} \rightarrow w_{n-1} = MCD(a, b).$$

MINIMO COMUNE MULTIPLO

Termini comuni e non comuni col maggior esponente.

$$mcm(a, b) = \frac{ab}{MCD(a, b)} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\frac{mcm(b, d)}{b}a + \frac{mcm(b, d)}{d}c}{mcm(b, d)}$$

POTENZE E LOGARITMI

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1 \qquad (-a)^3 = -x \qquad (-a)^2 = x \qquad -a^2 = -x$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \qquad (abc)^{-n} = a^{-n} b^{-n} c^{-n} \qquad a^m a^n a^p = a^{m+n+p} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(-\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(-\frac{b}{a}\right)^n \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

$$a^x = y \rightarrow x = \log_a y \qquad b^{\log_b x} = x \qquad \log_b x = \frac{1}{\log_x b} \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \qquad \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \qquad \log_a m^n = n \cdot \log_a m \qquad \log_a a = 1$$

ESPRESSIONI

$$4 + \frac{1}{2}(3 \cdot 2) - \frac{4}{2} + 6 = 4 + \frac{1}{2}6 - 2 + 6 = 4 + 3 - 2 + 6 = 11$$

MONOMI

Riduzione: $-3ab5a^32b^4c = -30a^4b^5c.$

Addizione: $10a^2b + 14abc - 3a^2b - 4abc = 7a^2b + 10abc.$

Moltiplic.: $(5ab^2)(-3a^2bc^3)(-bc^2) = 5(-3)(-1)(aa^2)(b^2bb)(c^3c^2) = 15a^3b^4c^5.$

Divisione: $\frac{8a^3b^5}{2ab^4} = \frac{8}{2} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b} = 4a^2b.$

Potenza: $(-2a^2bc^3)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3(c^3)^3 = -8a^6b^3c^9.$

MCD: $-8a^3b^4c^5; \quad 6ab^2c^4d; \quad -10a^4b^5c^2m; \rightarrow 2ab^2c^2$ (i termini comuni col più piccolo esponente).

mcm: $-8a^3b^4c^5; \quad 6ab^2c^4d; \quad -10a^4b^5c^2m; \rightarrow -120a^4b^5c^5dm$ (i termini col maggiore esponente).

POLINOMI

$ax^4 + a^2x^3 + a^6x^2 + x + 1$: polinomio di 4 termini, completo e ordinato rispetto a x , con il termine di grado 0 (x^0).

Moltiplic.: $3a(m+n) = 3am + 3an. \quad (-2xy^2)(3x^3 - 7x^2y^4) = -6x^4y^2 + 14x^3y^6.$

$$(2a+3b)(m-n) = 2am - 2an + 3bm - 3bn.$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2.$$

Divisione: $\frac{12a^5b^3c^4 - 9a^6b^4c^{10}m - 2a^4b^6c^5}{3a^2bc^3} = 4a^3b^2c - 3a^4b^3c^7m - \frac{2}{3}a^2b^5c^2.$

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y.$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y \quad \text{solo se la potenza è pari.}$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2.$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 \quad \text{solo se la potenza è dispari.}$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + xy^2 + x^2y + y^3.$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3.$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + xy^3 + x^2y^2 + x^3y + y^4.$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x + y} = x^4 - xy^3 + x^2y^2 - x^3y + y^4.$$

Ruffini:
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & & & & +5 & -13 & +10 & & -1 \\ 5x^3 - 13x^2 + 10x - 1 & = & +2 & & & +10 & -6 & & +8 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & +5 & -3 & 4 & & 7 \end{array} = 5x^2 - 3x + 4; \text{ resto } = 7.$$

Il polinomio deve essere trascritto completo (se manca un termine per una x^n si scrive 0).

Quadrato: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(2a + 3a^2b - 5b^3)^2 = 4a^2 + 9a^4b^2 + 25b^6 + 12a^3b - 20ab^3 - 30a^2b^4.$$

Cubo: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(2xy^3 + 3x^2)^3 = (2xy^3)^3 + 3(2xy^3)^2(3x^2) + 3(2xy^3)(3x^2)^2 + (3x^2)^3 =$$

$$= 8x^3y^9 + 3(4x^2y^6)3x^2 + 3(2xy^3)(9x^4) + 27x^6 = 8x^3y^9 + 36x^4y^6 + 54x^5y^3 + 27x^6.$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO (QUADRATICHE)

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{Discriminante: } \Delta = b^2-4ac.$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2). \quad \text{Nella forma semplice: } ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$$

Se $\Delta > 0$, esistono 2 soluzioni distinte.

Se $\Delta = 0$, esistono 2 soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$.

Se $\Delta < 0$, esistono 2 soluzioni complesse e coniugate.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad x_1x_2=\frac{c}{a} \quad x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

GRAFICI

Le equazioni di I grado sono rette, quelle di II grado sono curve.

Ogni punto ha 2 coordinate: $P_0(x_0, y_0)$.

Per 2 punti noti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ passa una sola retta con equazione: $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$.

Ogni equazione si può riportare in un grafico assegnando due valori arbitrari a x dopo aver risolto l'equazione in y per ottenere le coordinate: $x-y+1=0 \rightarrow y=x+1 \rightarrow$ quando $x=0, y=0+1$, etc...

$$\begin{array}{cccc} x=0 & x=1 & x=2 \dots & x=n \\ y=1 & y=2 & y=3 \dots & y=n+1. \end{array}$$

Due punti arbitrari del grafico saranno $A(0, 1)$ e $B(1, 2)$.

Coefficiente angolare (derivata): $m = -\frac{y_0}{x_0}$ (retta passante per l'origine degli assi); $m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ (altre rette).

Equazione della retta passante per un punto (fascio di rette): $y-y_0 = m(x-x_0)$.

Coordinate del punto medio di un segmento: $x_M = \frac{x_0+x_1}{2}$; $y_M = \frac{y_0+y_1}{2}$.

Distanza tra due punti: $\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$.

Parabola: $y = ax^2+bx+c$. Nella forma $ax^2+bx+c=0$ le soluzioni x_1 e x_2 sono i punti in cui la parabola tocca l'asse delle ascisse (quindi $y=0$). Note le coordinate d'intersezione della parabola con gli assi delle x e delle

$$y, P_X(x_0, 0) \text{ e } P_Y(0, y_0) \rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0}x^2 + y_0.$$

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c \rightarrow y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2}$; fuochi dell'ellisse: (a, b) ; area dell'ellisse: c .

Cerchio: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = c$.

SISTEMI

Il sistema di due equazioni di I grado in due variabili individua il punto d'intersezione delle due rette.

$$\text{Sostituzione: } \begin{cases} x=2y-3 \\ 4x-y-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y-3 \\ 4(2y-3)-y-2=0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} x=2y-3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.$$

$$\text{Confronto: } \begin{cases} x=y-3 \\ x+y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-3 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} 1-y=y-3 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y=4 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=1-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}.$$

MATRICI

$A_{m,n}$: un insieme di numeri ordinati per m righe e n colonne (matrice A di ordine n).

a_{ij} : un elemento di $A_{m,n}$ che si trova alla riga i e alla colonna j .

$a_{i,i}$ = elemento della diagonale.

$m = n$: matrice quadrata.

$A_{1,n}$: vettore riga.

$A_{m,1}$: vettore colonna.

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \text{ matrice quadrata di secondo ordine.}$$

$$A_{1,3} = [a_{1,1} \ a_{1,2} \ a_{1,3}] \text{ vettore riga.}$$

Traccia: $tr(A_{m,n}) = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{m,n}$: la somma degli elementi della diagonale. $tr(A_{2,2}) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

Determinante: $\partial A_{2,2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$ (differenza dei prodotti degli elementi delle due diagonali);

$$\partial A_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}.$$

$$\partial A_{3,3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Regola di Sarrus (solo per $A_{3,3}$):
si scrivono di fianco alla matrice le prime due colonne.

Il valore di un determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne.

Lo scambio di due righe o di due colonne di un determinante equivale a cambiarne il segno.

Moltiplicare tutta una riga o tutta una colonna per k equivale a $\partial A_{m,n} k$.

Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli (0) il $\partial A_{m,n} = 0$.

Somma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Moltiplicazione per uno scalare k : $kA_{m,n}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Regola di Cramer:

per un sistema di equazioni a due incognite $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{\partial \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}, \quad y = \frac{\partial \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb};$$

per un sistema di equazioni a tre incognite: $\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{\partial \begin{bmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\partial \begin{bmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}, \quad z = \frac{\partial \begin{bmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}.$$

Moltiplicazione tra matrici A e B solo se il numero di righe di B coincide col numero di colonne di A :

$$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}:$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1}) & (a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2}) \\ (a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1}) & (a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+0+2) & (1+0+0) \\ (-3+6+1) & (-1+3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} .$$

SOMMATORIA

Risultato della somma di una serie di numeri: $\sum_{i=m}^n f(i)$ sommatoria di $f(i)$ al variare di i da m a n .

$$\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{n-1} + x_n \leftarrow \sum_{i=4}^{10} i^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 \leftarrow \sum_{i=1}^3 ia = a + 2a + 3a .$$

Se il numero di addendi è infinito ($n = \infty$) la sommatoria è detta serie.

$$\text{Proprietà: } \sum_{i=m}^n ax_i = a \sum_{i=m}^n x_i \rightarrow \sum_{i=1}^3 2x_i = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \sum_{i=1}^3 2x_i = 2(x_1 + x_2 + x_3) .$$

$$\sum_{i=m}^n a = na \rightarrow \sum_{i=1}^3 a = 3a .$$

$$\sum_{i=m}^n a_i + b_i = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i \text{ la sommatoria di una somma è la somma delle sommatorie.}$$

$$\sum_{i=m}^n a + x_i = na + \sum_{i=m}^n x_i .$$

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q x_{i,j} = x_{m,p} + x_{m+1,p+1} + \dots + x_{n-1,q-1} + x_{n,q} .$$

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q x = nqx .$$

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Addizione: $f(x) = 6x-1$; $g(x) = 7x^3-3x-2$; $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 6x-1+7x^3-3x-2 = 7x^3+3x-3$.
 Moltiplicazione: $f(x) = x$; $g(x) = (x-1)(x+1)$; $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x(x-1)(x+1) = x^3-x$.
 Divisione: $f(x) = x$; $g(x) = (x+1)(6-x)$; $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{(x+1)(6-x)} = \frac{x}{5x-x^2+6}$.

LIMITE

Il limite oltre il quale la funzione non può andare ma a cui si avvicina sempre di più man mano che l'argomento si avvicina a 0, a ∞ o a qualsiasi altro numero n . Per esempio il limite di $\frac{1}{n}$ con n che tende a ∞ è 0 (se si fa aumentare sempre di più n , $\frac{1}{n}$ sarà sempre più vicino a 0).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se $x \in I(x_0)$ tale che $|f(x) - l| < \epsilon$ (x_0 è un numero finito; l è il limite finito; ϵ è un numero a piacere maggiore di 0 molto piccolo);
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ se $x \in I(x_0)$ tale che $|f(x)| > K$ (K è un numero a piacere maggiore di 0 molto grande);
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ se $x \in I(a+\infty)$ tale che $|f(x) - l| < \epsilon$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ se $x \in I(a+\infty)$ tale che $|f(x)| > K$.

DERIVATA

Limite del rapporto incrementale (indica come varia un'incognita in una funzione): $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.
 È il coefficiente angolare della tangente al grafico di una funzione in un punto dell'ascissa.

$f'(ax) = a$. $f'(x^n) = nx^{n-1}$. $f'(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

$f(x) = 15x + 4x^2 + 9yx \rightarrow f'(x) = 15 + 4(2x) + 9y \rightarrow f'(x) = 15 + 8x + 9y$.

Nel grafico della derivata si collocano in ordinata $\frac{\delta y}{\delta x}$ e in ascissa x .

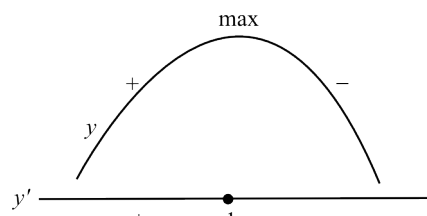
ESTREMI DI UNA FUNZIONE

$f(x_0) \leq f(x)$: una funzione ha un minimo in x_0 se in x_0 assume un valore inferiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto;
 $f(x_0) \geq f(x)$: una funzione ha un massimo in x_0 se in x_0 assume un valore maggiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto.

Un punto x_0 è di *max* o di *min* se la derivata prima della funzione si annulla in quel punto (x_0): $f'(x_0) = 0$.
 Per trovare gli estremi *min* e *max*:

- 1) estrarre la derivata prima della funzione: $f'(x)$;
- 2) porre la derivata uguale a zero: $f'(x) = 0$;
- 3) risolvere l'equazione della derivata per trovare i punti estremali:
 - ove $f'(x) > 0$ la funzione è crescente;
 - ove $f'(x) < 0$ la funzione è decrescente;
 - ove $f'(x) = 0$ la funzione inverte il proprio valore (punto di flesso).

Es: $y = -3x^2 - 6x - 8$; $y' = -6x - 6$; $-6x - 6 = 0$; $-6x = 6$;
 $x = -1$, quindi $A(-1, y)$; $y = -3(-1)^2 - 6(-1) - 8$;



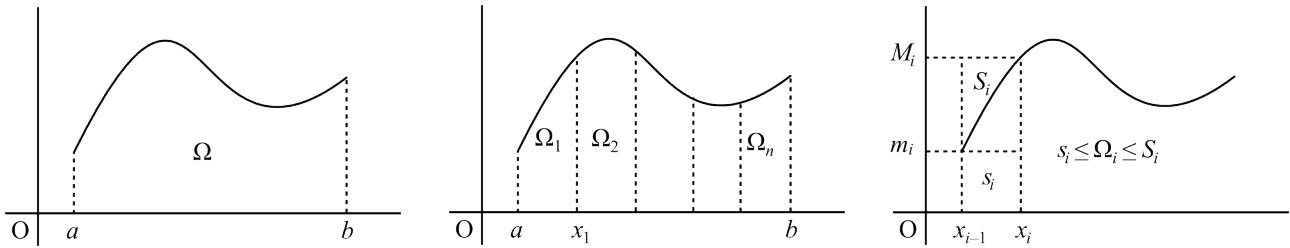
$$y = -3 + 6 - 8 ;$$

$y = -5$ quindi $A(-1, -5)$ è un estremo;

$-6x - 6 > 0$ (quando y' è positiva?)

$x < -1$: per valori di x minori di -1 (verso sinistra) la derivata è crescente e $A(-1, -5)$ è un *max*.

INTEGRALE



$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\};$$

l'intervallo $[a, b]$ può essere scomposto in n intervalli: $[a, b] = [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$;

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n.$$

$f(x)$ ammette su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un massimo M_i e un minimo m_i in base ai quali s'individuano le aree dei due rettangoli $S_i = M_i(x_i - x_{i-1})$ e $s_i = m_i(x_i - x_{i-1})$: $s_i \leq \Omega_i \leq S_i$;

somme superiori: $S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n$;

somme inferiori: $s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$;

$$s_n \leq \Omega \leq S_n.$$

δ_n è la più grande delle differenze $(M_1 - m_1, \dots, M_n - m_n)$;

$$S_n - s_n = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \dots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) \rightarrow 0 \leq S_n - s_n \leq \delta_n(b - a).$$

Se $x_i - x_{i-1} = 0 \rightarrow M_i - m_i = 0$.

Suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di intervalli, di uguale ampiezza $\delta x = \frac{(b-a)}{n}$, tendente a

∞ , $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, δ_n tende a 0 così che, essendo ζ_i un punto qualsiasi dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\bar{S}_n = f(\zeta_1)(x_1 - x_0) + f(\zeta_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\zeta_n)(x_n - x_{n-1}) ;$$

quando $f(\zeta_i) = M_i \rightarrow \bar{S}_n = S_n$ e quando $f(\zeta_i) = m_i \rightarrow \bar{S}_n = s_n \rightarrow \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$.

$$\int_a^b f(x) \delta x = \int_a^{x_1} f(x) \delta x + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta x + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) \delta x .$$

$$\int f(x^n) \delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ Es: } f(x) = 2 + 2x + x^2 \rightarrow \int f(x) \delta x = 2 \frac{x^{0+1}}{0+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} \text{ indefinito.}$$

$$\int_a^b f(x^n) \delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b \rightarrow \begin{matrix} x=b \\ x=a \end{matrix} \rightarrow f(b) - f(a) \text{ Es: } f(x) = 2 + 2x + x^2$$

$$\int_1^5 f(x) \delta x = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 \rightarrow \begin{matrix} x=5 \\ x=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2(5) + 5^2 + \frac{5^3}{3} = 60 \\ 2(1) + 1^2 + \frac{1^3}{3} = \frac{10}{3} \end{matrix} \rightarrow 60 - \frac{10}{3} = \frac{170}{3} \text{ definito (1, 5).}$$

TOPOLOGIA

INTERVALLI

$[m, M]$: in un insieme finito E , m è il minimo (il termine più piccolo), M è il massimo (il termine più grande), s è l'estremo superiore coincidente con M , i è l'estremo inferiore coincidente con m .

raggio

$$[a - b] \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline a \quad \text{centro} \quad b \end{array} \quad a < b \quad \text{raggio: } \delta = \frac{b-a}{2} \quad \text{centro: } \epsilon = \frac{b+a}{2}$$

Intervallo limitato aperto: $a < x < b$

Intervallo aperto a sinistra: $a < x \leq b$

Intervallo limitato chiuso: $a \leq x \leq b$


Intervallo aperto a destra: $a \leq x < b$

INTORNI

$I(x_0)$: intorno completo di un punto (x_0) è un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0 .

$I(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: intorno circolare di un punto (x_0) è un intervallo aperto di centro x_0 con raggio δ .

Per ogni coppia di punti a e b esistono i relativi intorni senza punti in comune: $I_a \cap I_b = \emptyset$



TANGENTI

L'equazione della tangente in $P_0(x_0, y_0)$ alla curva $y = f(x)$ è: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Es.: $y = 3x^2 + x$, per $P_0(2, 14) \rightarrow y' = 3(2x) + 1 = 6x + 1 \rightarrow y' = 12 + 1 = 13 \rightarrow y - 14 = 13(x - 2)$.

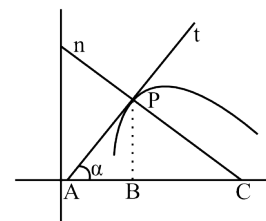
La normale $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ è la retta passante per P perpendicolare alla tangente.

Misura della tangente: $\overline{AP} = \sqrt{y_0^2 + \left[\frac{y_0}{y'(x_0)}\right]^2}$

Misura della sottotangente: $\overline{AB} = y_0 \cot \alpha = \frac{y_0}{\tan \alpha} = \frac{y_0}{y'(x_0)}$

Misura della normale: $\overline{PC} = \sqrt{y_0^2 + [y_0 y'(x_0)]^2}$

Misura della sottonormale: $\overline{BC} = y_0 \tan \alpha = y_0 y'(x_0)$



DIAGONALI

Il numero delle diagonali di un poligono di n vertici è: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

La diagonale del rettangolo è: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ (dal teorema di Pitagora).

STATISTICA

PROBABILITÀ

Rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi (ugualmente) possibili: $p = \frac{C_f}{C_p}$

VALORE ATTESO

Il valore atteso di una variabile casuale è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi).

Per esempio, il valore atteso dal lancio di un dado a 6 facce, con probabilità $\frac{1}{6}$ per ogni faccia, è:

$$(1+2+3+4+5+6) \frac{1}{6} = \frac{(1+2+3+4+5+6)}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$v = (G_v \cdot G_p) + (B_v \cdot B_p)$$

- v : valore atteso
 G_v : valore dell'azione
 G_p : probabilità dell'azione
 B_v : valore dell'azione non voluta
 B_p : probabilità dell'azione non voluta

FATTORIALE

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad 0! = 1.$$

Calcolo combinatorio, per n cifre $[x, y, \dots, n]$ esistono $n!$ combinazioni senza ripetizioni di alcuna cifra. $[x, y, z]$ permutano 6 combinazioni: 1 $[x, y, z]$, 2 $[x, z, y]$, 3 $[y, x, z]$, 4 $[y, z, x]$, 5 $[z, x, y]$, 6 $[z, y, x]$.

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \text{numero dei gruppi di } k \text{ elementi che si possono formare con } n \text{ elementi.}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{5040}{2(120)} = 21 \quad : \text{ da un gruppo di 7 elementi si possono formare 21 coppie.}$$

COEFFICIENTE MULTINOMIALE

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$ = numero di gruppi di diversi elementi (k_1, \dots, k_r) che si possono formare con n elementi.

$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39916800}{1 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 2} = 34650$: le lettere della parola *MISSISSIPPI* (1M, 4I, 4S, 2P) possono essere combinate in 34650 modi.

DISTRIBUZIONI STATISTICHE

Distrib. semplici: *serie* (carattere qualitativo) e *seriazioni* (carattere quantitativo);

Frequenza assoluta: $\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$: n_i è il numero di unità statistiche che rappresentano la modalità i di un certo carattere.

Frequenza relativa: $f_i = \frac{n_i}{N}$ è il rapporto tra la frequenza assoluta n_i e il totale N :

$$\sum_{i=1}^k f_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \dots + \frac{n_k}{N} = 1 \quad .$$

DIVISIONE DI UNA VARIABILE IN CLASSI

Estremi (*min*, *max*): i valori numerici che indicano le classi (p. es. da 45 a 50, da 132 a 133).

Limiti o confini (inferiore e superiore): semisomma fra *max* di una classe e *min* della classe successiva (se c'è discontinuità tra gli estremi delle classi) $c.sup_i = \frac{max_{i-1} + min_i}{2}$, $c.inf_i = \frac{max_i + min_{i+1}}{2}$.

Ampiezza: differenza tra limite superiore e inferiore (*lim.sup*–*lim.inf*).

Valore centrale: semisomma tra limite inferiore e superiore $\frac{lim.sup_i + lim.inf_i}{2}$.

MEDIA

Media aritmetica: per le modalità x_N di N unità statistiche, $M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$;

per le frequenze n di x , $M_a = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N}$;

$$x_1 \leq M_a \leq x_N.$$

Media aritmetica ponderata: $M_{a,pond} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}$, f_i è il *peso* (ponderazione) assegnato alle modalità.

Media geometrica: $M_g = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$ i valori non si sommano, si moltiplicano (tassi di crescita).

Media geometrica ponderata: $M_{g,pond} = \sum_{i=1}^N f_i \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i^{f_i}}$.

Media armonica: $M_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$.

Media di potenza: $M^s = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^s \right)^{\frac{1}{s}}$.

SCARTI

Differenza tra modalità e media: $s_i = (x_i - M_a)$.

La somma degli scarti è nulla: $s_N = (x_1 - M_a) + (x_2 - M_a) + \dots + (x_N - M_a) = \sum_{i=1}^n (x_i - M_a) = 0$.

$$M_a = \frac{5+7+8+4}{4} = 6 \rightarrow s_1 = 5-6 = -1; \quad s_2 = 7-6 = 1; \quad s_3 = 8-6 = 2; \quad s_4 = 4-6 = -2 \rightarrow s_1+s_2+s_3+s_4 = 1-1+2-2 = 0.$$

VARIANZA

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - M_a)^2 + (x_2 - M_a)^2 + \dots + (x_N - M_a)^2} \quad .$$

σ è l'indice di dispersione che esprime la varianza generale delle modalità dalla M_a , cioè quanto si discosta mediamente la sommatoria degli scarti dalla M_a . Più il valore di σ è elevato, più il divario degli estremi, rispetto alla M_a , è notevole.

Visto che la somma degli scarti è nulla, per ottenere un valore di riferimento (σ^2) si elevano gli scarti al quadrato, in modo che siano tutti positivi; si opera quindi la radice quadrata per ottenere un numero gestibile.