ALGEBRA

Segni

$x-y=0 \leftrightarrow x=y$ $x-y>0 \leftrightarrow x>y$ $x-y<0 \leftrightarrow x<y$ $-x>y \leftrightarrow x<-y$

$(x)(y)=z$ $(-x)(-y)=z$ $(x)(-y)=-z$ $\frac{x}{y}=z$ $\frac{x}{-y}=-z$

Moltiplicazioni

$(a+b+c)m=am+bm+cm$ $(a+b)(c+d+m)=ac+ad+am+bc+bd+bm$

Divisioni

$\frac{a}{b}=c \leftrightarrow cb=a$ $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ $a\frac{b}{a}=b$ $\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}$

$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ $\frac{abc}{m}=\frac{a}{m}bc=a\frac{b}{m}c=ab\frac{c}{m}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Massimo Comun Divisore

Termini comuni col più piccolo esponente.

$$MCD(8,20) \rightarrow \begin{array}{c|c} numero & divisore\ minimo \\ \mathbf{8} & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 2^3; \quad \begin{array}{c|c} numero & divisore\ minimo \\ \mathbf{20} & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 2^2\cdot 5\cdot 1 \rightarrow MCD(8,20)=2^2.$$

$MCD(a,b) \rightarrow \frac{a}{b}=c, w_{resto} \rightarrow \frac{b}{w}=c_1, w_1 \ \ldots \ \frac{w_{n-1}}{w_n} \rightarrow w_{n-1}=MCD(a,b).$

Minimo Comune Multiplo

Termini comuni e non comuni col maggior esponente.

$mcm(a,b)=\frac{ab}{MCD(a,b)}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\frac{mcm(b,d)}{b}a+\frac{mcm(b,d)}{d}c}{mcm(b,d)}$

Potenze e logaritmi

$a^3=a\cdot a\cdot a$ $a^1=a$ $a^0=1$ $(-a)^3=-x$ $(-a)^2=x$ $-a^2=-x$

$(abc)^n=a^nb^nc^n$ $(abc)^{-n}=a^{-n}b^{-n}c^{-n}$ $a^ma^na^p=a^{m+n+p}$ $(a^m)^n=a^{mn}$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(-\frac{b}{a}\right)^n$ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ $x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

$a^x=y \rightarrow x=\log_a y$ $b^{\log_b x}=x$ $\log_b x=\frac{1}{\log_x b}$ $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$

$\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n$ $\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$ $\log_a m^n=n\cdot\log_a m$ $\log_a a=1$

Espressioni

$$4+\frac{1}{2}(3\cdot 2)-\frac{4}{2}+6=4+\frac{1}{2}6-2+6=4+3-2+6=11$$

Monomi

Riduzione: $-3ab5a^3 2b^4c = -30a^4b^5c$.

Addizione: $10a^2b + 14abc - 3a^2b - 4abc = 7a^2b + 10abc$.

Moltiplic.: $(5ab^2)(-3a^2bc^3)(-bc^2) = 5(-3)(-1)(aa^2)(b^2bb)(c^3c^2) = 15a^3b^4c^5$.

Divisione: $\frac{8a^3b^5}{2ab^4}=\frac{8}{2}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^5}{b}=4a^2b$.

Potenza: $(-2a^2bc^3)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3(c^3)^3 = -8a^6b^3c^9$.

MCD: $-8a^3b^4c^5$; $6ab^2c^4d$; $-10a^4b^5c^2m$; $\rightarrow$ $2ab^2c^2$ (i termini comuni col più piccolo esponente).

mcm: $-8a^3b^4c^5$; $6ab^2c^4d$; $-10a^4b^5c^2m$; $\rightarrow$ $-120a^4b^5c^5dm$ (i termini col maggiore esponente).

Polinomi

$ax^4+a^2x^3+a^6x^2+x+1$: polinomio di 4 termini, completo e ordinato rispetto a x, con il termine di grado 0 (x^0).

Moltiplic.: $3a(m+n) = 3am+3an$. $(-2xy^2)(3x^3-7x^2y^4) = -6x^4y^2+14x^3y^6$.

$(2a+3b)(m-n) = 2am-2an+3bm-3bn$.

$\mathbf{(a+b)(a-b)} = a^2-ab+ba-b^2 = \mathbf{a^2-b^2}$. $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2$.

Divisione: $\frac{12a^5b^3c^4-9a^6b^4c^{10}m-2a^4b^6c^5}{3a^2bc^3}=4a^3b^2c-3a^4b^3c^7m-\frac{2}{3}a^2b^5c^2$.

$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$. $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ solo se la potenza è pari.

$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$. $\frac{x^3-y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$ solo se la potenza è dispari.

$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+xy^2+x^2y+y^3$. $\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

$\frac{x^5-y^5}{x-y}=x^4+xy^3+x^2y^2+x^3y+y^4$. $\frac{x^5-y^5}{x+y}=x^4-xy^3+x^2y^2-x^3y+y^4$.

Ruffini: $\frac{5x^3-13x^2+10x-1}{x-2} = \begin{array}{c|ccc|c} & +5 & -13 & +10 & -1 \\ +2 & & +10 & -6 & +8 \\ \hline & +5 & -3 & 4 & 7 \end{array} = 5x^2-3x+4$; resto =7.

Il polinomio deve essere trascritto completo (se manca un termine per una x^n si scrive 0).

Quadrato: $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \mathbf{a^2+2ab+b^2}$.

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$(2a+3a^2b-5b^3)^2 = 4a^2+9a^4b^2+25b^6+12a^3b-20ab^3-30a^2b^4$.

Cubo: $\mathbf{(a+b)^3} = (a+b)(a+b)(a+b) = \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$(2xy^3+3x^2)^3 = (2xy^3)^3+3(2xy^3)^2(3x^2)+3(2xy^3)(3x^2)^2+(3x^2)^3 =$

$= 8x^3y^9+3(4x^2y^6)3x^2+3(2xy^3)(9x^4)+27x^6 = 8x^3y^9+36x^4y^6+54x^5y^3+ 27x^6.$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.$

Potenze: $(a+b)^n = a^n+\mathit{triangolo\text{-}di\text{-}Tartaglia}+b^n.$ $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$

Tartaglia:

1	
1 1	
1 2 1	(quadrato)
1 3 3 1	(cubo)
1 4 6 4 1	(quarta potenza)
1 5 10 10 5 1	(quinta potenza)
1 6 15 20 15 6 1	(sesta potenza)
1 7 21 35 35 21 7 1	(settima potenza)
1 8 28 56 79 56 28 8 1	(ottava potenza)

Scomposizione in fattori: 1) si cerca il MCD; 2) si divide il polinomio per il MCD;

3) si mette in evidenza il MCD, scrivendo tra parentesi il risultato della divisione.

$2a^3-10a^2b+12a^4 = 2a^2(a-5b+6a^2).$

A^2+B^2 non si può decomporre.

$A^2-B^2 = (A-B)(A+B).$

$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2).$

$A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2).$

A^4+B^4 non si può decomporre.

$A^4-B^4 = (A^2-B^2)(A^2+B^2) = (A-B)(A+B)(A^2+B^2).$

$$\frac{3}{ab}+\frac{4a}{bc}=\frac{3c}{abc}+\frac{4a^2}{abc}=\frac{3c+4a^2}{abc}\ .$$

Equazioni di primo grado (lineari)

$ax = b \ \rightarrow \ x=\frac{b}{a}$; se $a = 0 \ \rightarrow \ x=\frac{b}{0}$ impossibile; se $a = b = 0 \ \rightarrow \ x=\frac{0}{0}$ indeterminata.

$5-x = 1+x \quad \rightarrow \quad 5-1-x-x = 0 \quad \rightarrow \quad 4-2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 4 \quad \rightarrow \quad x=\frac{4}{2}$.

$-8x+4 = 20-3x \quad \rightarrow \quad 8x-4 = -20+3x \quad \rightarrow \quad 8x-3x = 4-20 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{16}{5}$.

$\frac{x-1}{x}-\frac{3}{2x}=\frac{7}{4} \ \rightarrow \ mcm(x, 2x, 4) = 4x \ \rightarrow \ 4x\left(\frac{x-1}{x}\right)-4x\left(\frac{3}{2x}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)4x \ \rightarrow \ 4(x-1)-2(3) = 7x.$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \ \leftrightarrow \ bx = ya.$

Proporzioni

$\frac{a}{x}=\frac{b}{c} \ \rightarrow \ x=\frac{ac}{b}$ $\frac{x}{a}=\frac{b}{c} \ \rightarrow \ x=\frac{ab}{c}$

Equazioni di secondo grado (quadratiche)

$ax^2+bx+c = 0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Discriminante: $\Delta = b^2-4ac$.

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Nella forma semplice: $ax^2+bx = 0 \rightarrow x(ax+b) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2=-\frac{b}{a}$

Se $\Delta > 0$, esistono 2 soluzioni distinte.
Se $\Delta = 0$, esistono 2 soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$.
Se $\Delta < 0$, esistono 2 soluzioni complesse e coniugate.

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. $x_1 x_2=\frac{c}{a}$. $x^2-(x_1+x_2)x+x_1 x_2=0$.

Grafici

Le equazioni di I grado sono rette, quelle di II grado sono curve.

Ogni punto ha 2 coordinate: $P_0(x_0, y_0)$.

Per 2 punti noti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ passa una sola retta con equazione: $\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$.

Ogni equazione si può riportare in un grafico assegnando due valori arbitrari a x dopo aver risolto l'equazione in y per ottenere le coordinate: $x-y+1 = 0 \rightarrow y = x+1 \rightarrow$ *quando* $x = 0, y = 0+1$, etc…

$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$ …	$x = n$
$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$ …	$y = n+1$.

Due punti arbitrari del grafico saranno $A(0, 1)$ e $B(1, 2)$.

Coefficiente angolare (derivata): $m=-\frac{y_0}{x_0}$ (retta passante per l'origine degli assi); $m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ (altre rette).

Equazione della retta passante per un punto (fascio di rette): $y-y_0 = m(x-x_0)$.

Coordinate del punto medio di un segmento: $x_M=\frac{x_0+x_1}{2}$; $y_M=\frac{y_0+y_1}{2}$.

Distanza tra due punti: $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$.

Parabola: $y = ax^2+bx+c$. Nella forma $ax^2+bx+c = 0$ le soluzioni x_1 e x_2 sono i punti in cui la parabola tocca l'asse delle ascisse (quindi $y = 0$). Note le coordinate d'intersezione della parabola con gli assi delle x e delle y, $P_X(x_0, 0)$ e $P_Y(0, y_0) \rightarrow y=-\frac{y_0}{x_0}x^2+y_0$.

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c \rightarrow y=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}$; fuochi dell'ellisse: (a, b); area dell'ellisse: c.

Cerchio: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=c$.

Sistemi

Il sistema di due equazioni di I grado in due variabili individua il punto d'intersezione delle due rette.

Sostituzione: $\begin{cases}x=2y-3\\4x-y-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-3\\4(2y-3)-y-2=0\end{cases}$ $\begin{matrix}\dots\\\dots\end{matrix}$ $\begin{cases}x=2y-3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=4-3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

Confronto: $\begin{cases}x=y-3\\x+y-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=y-3\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}1-y=y-3\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}2y=4\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=1-2\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=-1\end{cases}$.

Matrici

$A_{m,n}$: un insieme di numeri ordinati per m righe e n colonne (matrice A di ordine n).

$a_{i,j}$: un elemento di $A_{m,n}$ che si trova alla riga i e alla colonna j. $a_{i,i}$ = elemento della diagonale.

$m = n$: matrice quadrata. $A_{1,n}$: vettore riga. $A_{m,1}$: vettore colonna.

$A_{2,2}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ matrice quadrata di secondo ordine. $A_{1,3}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{bmatrix}$ vettore riga.

Traccia: $tr(A_{m,n}) = a_{i,i}+a_{j,j} \ldots +a_{m,n}$: la somma degli elementi della diagonale. $tr(A_{2,2}) = a_{1,1}+a_{2,2}$.

Determinante: $\partial A_{2,2} = a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}$ (differenza dei prodotti degli elementi delle due diagonali);
$\partial A_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}-a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$.

$$\partial A_{3,3} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

Regola di Sarruss (solo per $A_{3,3}$):
si scrivono di fianco alla matrice le prime due colonne.

Il valore di un determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne.
Lo scambio di due righe o di due colonne di un determinante equivale a cambiarne il segno.
Moltiplicare tutta una riga o tutta una colonna per k equivale a $\partial A_{m,n}k$.
Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli (0) il $\partial A_{m,n} = 0$.

Somma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Moltiplicazione per uno scalare k: $kA_{m,n}$:

$$2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Regola di Cramer:

per un sistema di equazioni a due incognite $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \rightarrow x=\frac{\partial\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{ed-fb}{ad-cb}, \qquad y=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{af-ce}{ad-cb};$$

per un sistema di equazioni a tre incognite: $\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} \rightarrow x=\frac{\partial\begin{bmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}, \quad y=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}, \quad z=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}.$$

Moltiplicazione tra matrici *A* e *B* solo se il numero di righe di *B* coincide col numero di colonne di *A*: $A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1})(a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2}) \\ (a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1})(a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+0+2) & (1+0+0) \\ (-3+6+1) & (-1+3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

SOMMATORIA

Risultato della somma di una serie di numeri: $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ sommatoria di $f(i)$ al variare di i da m a n.

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-1} + x_n \ \leftarrow \ \sum_{i=4}^{10} i^2 = 4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 \ \leftarrow \ \sum_{i=1}^{3} ia = a+2a+3a \ .$$

Se il numero di addendi è infinito ($n = \infty$) la sommatoria è detta serie.

Proprietà: $\sum_{i=m}^{n} ax_i = a\sum_{i=m}^{n} x_i \ \rightarrow \ \sum_{i=1}^{3} 2x_i = 2x_1+2x_2+2x_3 \ \rightarrow \ \sum_{i=1}^{3} 2x_i = 2(x_1+x_2+x_3)$.

$$\sum_{i=m}^{n} a = na \ \rightarrow \ \sum_{i=1}^{3} a = 3a \ .$$

$\sum_{i=m}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$ la sommatoria di una somma è la somma delle sommatorie.

$$\sum_{i=m}^{n} a + x_i = na + \sum_{i=m}^{n} x_i \ .$$

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x_{i,j} = x_{m,p} + x_{m+1,p+1} + \ldots + x_{n-1,q-1} + x_{n,q} \ .$$

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x = nqx \ .$$

ANALISI

Operazioni tra funzioni

Addizione: $f(x) = 6x–1$; $g(x) = 7x^3–3x–2$; $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 6x–1+7x^3–3x–2 = 7x^3+3x–3$.

Moltiplicazione: $f(x) = x$; $g(x) = (x–1)(x+1)$; $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) = x(x–1)(x+1) = x^3–x$.

Divisione: $f(x) = x$; $g(x) = (x+1)(6–x)$; $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{(x+1)(6-x)}=\frac{x}{5x-x^2+6}$.

Limite

Il limite oltre il quale la funzione non può andare ma a cui si avvicina sempre di più man mano che l'argomento si avvicina a 0, a ∞ o a qualsiasi altro numero *n*. Per esempio il limite di $\frac{1}{n}$ con *n* che tende a ∞ è 0 (se si fa aumentare sempre di più *n*, $\frac{1}{n}$ sarà sempre più vicino a 0).

$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se $x\in I(x_0)$ tale che $|f(x)-l|<\epsilon$ (x_0 è un numero finito; *l* è il limite finito; ϵ è un numero a piacere maggiore di 0 molto piccolo);

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ se $x\in I(x_0)$ tale che $|f(x)|>K$ (*K* è un numero a piacere maggiore di 0 molto grande);

$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ se $x\in I(a+\infty)$ tale che $|f(x)-l|<\epsilon$;

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ se $x\in I(a+\infty)$ tale che $|f(x)|>K$.

Derivata

Limite del rapporto incrementale (indica come varia un'incognita in una funzione): $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.

È il coefficiente angolare della tangente al grafico di una funzione in un punto dell'ascissa.

$f'(ax) = a$. $f'(x^n) = nx^{n-1}$. $f'(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$f(x) = 15x+4x^2+9yx \rightarrow f'(x) = 15+4(2x)+9y \rightarrow f'(x) = 15+8x+9y$.

Nel grafico della derivata si collocano in ordinata $\frac{\delta y}{\delta x}$ e in ascissa *x*.

Estremi di una funzione

$f(x_0)\leq f(x)$: una funzione ha un minimo in x_0 se in x_0 assume un valore inferiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto;

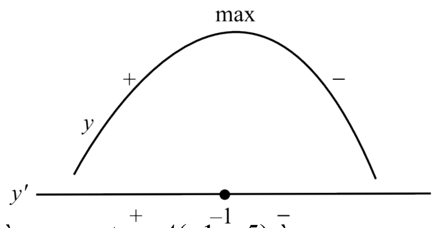
$f(x_0)\geq f(x)$: una funzione ha un massimo in x_0 se in x_0 assume un valore maggiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto.

Un punto x_0 è di *max* o di *min* se la derivata prima della funzione si annulla in quel punto (x_0): $f'(x_0)=0$.

Per trovare gli estremi *min* e *max*:

1) estrarre la derivata prima della funzione: $f'(x)$;
2) porre la derivata uguale a zero: $f'(x)=0$;
3) risolvere l'equazione della derivata per trovare i punti estremali:
   - ove $f'(x)>0$ la funzione è crescente;
   - ove $f'(x)<0$ la funzione è decrescente;
   - ove $f'(x)=0$ la funzione inverte il proprio valore (punto di flesso).

Es: $y=-3x^2-6x-8$; $y'=-6x-6$; $-6x-6=0$; $-6x=6$;



$x=-1$, quindi $A(-1, y)$; $y=-3(-1)^2-6(-1)-8$;

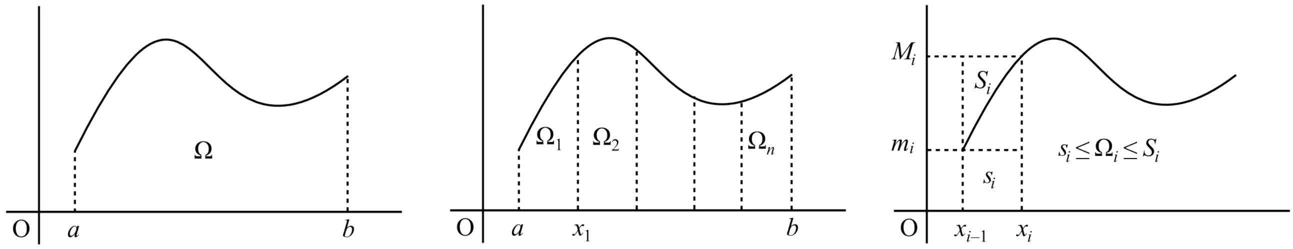
$y=-3+6-8$;

$y=-5$ quindi $A(-1, -5)$ è un estremo;

$-6x-6>0$ (quando y' è positiva?)

$x<-1$: per valori di x minori di –1 (verso sinistra) la derivata è crescente e $A(-1, -5)$ è un *max*.

INTEGRALE



$\Omega = \{(x, y): a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$;

l'intervallo $[a, b]$ può essere scomposto in n intervalli: $[a, b] = [x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$;

$\Omega = \Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_n$.

$f(x)$ ammette su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un massimo M_i e un minimo m_i in base ai quali s'individuano le aree dei due rettangoli $S_i = M_i(x_i-x_{i-1})$ e $s_i = m_i(x_i-x_{i-1})$: $s_i \le \Omega_i \le S_i$;
somme superiori: $S_n = M_1\Delta x_1+ M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n$; somme inferiori: $s_n = m_1\Delta x_1+ m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n$;

$s_n \le \Omega \le S_n$.

δ_n è la più grande delle differenze $(M_1-m_1, \ldots, M_n-m_n)$;

$S_n-s_n = (M_1-m_1)(x_1-x_0)+(M_2-m_2)(x_2-x_1)+\ldots+(M_n-m_n)(x_n-x_{n-1}) \rightarrow 0 \le S_n-s_n \le \delta_n(b-a)$.

Se $x_i-x_{i-1} = 0 \rightarrow M_i-m_i = 0$.

Suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di intervalli, di uguale ampiezza $\delta x=\frac{(b-a)}{n}$, tendente a ∞, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} s_n$, δ_n tende a 0 così che, essendo ξ_i un punto qualsiasi dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\bar{S}_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \;;$$

quando $f(\xi_i) = M_i \rightarrow \bar{S}_n=S_n$ e quando $f(\xi_i) = m_i \rightarrow \bar{S}_n=s_n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

$$\int_a^b f(x)\,\delta x=\int_a^{x_1} f(x)\,\delta x+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\delta x+\ldots+\int_{b-1}^{b} f(x)\,\delta x \;.$$

$\int f(x^n)\,\delta x=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Es: $f(x) = 2 + 2x + x^2 \rightarrow \int f(x)\,\delta x=2\frac{x^{0+1}}{0+1}+2\frac{x^{1+1}}{1+1}+\frac{x^{2+1}}{2+1}=2x+x^2+\frac{x^3}{3}$ indefinito.

$\int_a^b f(x^n)\,\delta x=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b \begin{array}{l}\rightarrow\ x=b\\ \rightarrow\ x=a\end{array} \rightarrow f(b)-f(a)$ Es: $f(x) = 2 + 2x + x^2$

$$\int_1^5 f(x)\,\delta x=2x+x^2+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^5 \begin{array}{l}\rightarrow\ x=5\ \rightarrow\ 2(5)+5^2+\frac{5^3}{3}=60\\ \rightarrow\ x=1\ \rightarrow\ 2(1)+1^2+\frac{1^3}{3}=\frac{10}{3}\end{array} \rightarrow\ 60-\frac{10}{3}=\frac{170}{3} \text{ definito } (1, 5).$$

TOPOLOGIA

Intervalli

$[m, M]$: in un insieme finito E, m è il minimo (il termine più piccolo), M è il massimo (il termine più grande), s è l'estremo superiore coincidente con M, i è l'estremo inferiore coincidente con m.

raggio

$[a - b]$ ——|——|——|—— $a < b$ raggio: $\delta = \frac{b-a}{2}$ centro: $\epsilon = \frac{b+a}{2}$

a centro b

Intervallo limitato aperto: $a < x < b$

Intervallo limitato chiuso: $a \leq x \leq b$

Intervallo aperto a sinistra: $a < x \leq b$

Intervallo aperto a destra: $a \leq x < b$

Intorni

$I(x_0)$: intorno completo di un punto (x_0) è un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0.

$I(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: intorno circolare di un punto (x_0) è un intervallo aperto di centro x_0 con raggio δ.

Per ogni coppia di punti a e b esistono i relativi intorni senza punti in comune: $I_a \cap I_b = \Phi$

I_a I_b

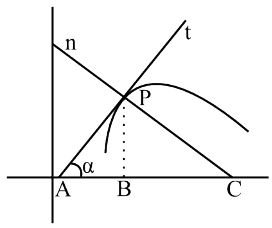
a b

Tangenti

L'equazione della tangente in $P_0(x_0, y_0)$ alla curva $y = f(x)$ è: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Es.: $y = 3x^2 + x$, per $P_0(2, 14)$ $\rightarrow$ $y' = 3(2x)+1 = 6x+1$ $\rightarrow$ $y' = 12+1 = 13$ $\rightarrow$ $y - 14 = 13(x-2)$.

La normale $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ è la retta passante per P perpendicolare alla tangente.



Misura della tangente: $\overline{AP} = \sqrt{y_0^2 + [\frac{y_0}{y'(x_0)}]^2}$

Misura della sottotangente: $\overline{AB} = y_0 \cot\alpha = \frac{y_0}{\tan\alpha} = \frac{y_0}{y'(x_0)}$

Misura della normale: $\overline{PC} = \sqrt{y_0^2 + [y_{0y}'(x_0)]^2}$

Misura della sottonormale: $\overline{BC} = y_0 \tan\alpha = y_0 y'(x_0)$

Diagonali

Il numero delle diagonali di un poligono di n vertici è: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

La diagonale del rettangolo è: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ (dal teorema di Pitagora).

STATISTICA

Probabilità

Rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi (ugualmente) possibili: $p=\frac{C_f}{C_p}$

Valore atteso

Il valore atteso di una variabile casuale è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi).

Per esempio, il valore atteso dal lancio di un dado a 6 facce, con probabilità $\frac{1}{6}$ per ogni faccia, è:

$$(1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6}=\frac{(1+2+3+4+5+6)}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$

$$v = (G_v \cdot G_p)+(B_v \cdot B_p)$$

v: valore atteso
G_v: valore dell'azione
G_p: probabilità dell'azione
B_v: valore dell'azione non voluta
B_p: probabilità dell'azione non voluta

Fattoriale

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ $0! = 1$.

Calcolo combinatorio, per n cifre [x, y, …, n] esistono $n!$ combinazioni senza ripetizioni di alcuna cifra.
[x, y, z] permutano 6 combinazioni: 1 [x, y, z], 2 [x, z, y], 3 [y, x, z], 4 [y, z, x], 5 [z, x, y], 6 [z, y, x].

Coefficiente binomiale

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ = numero dei gruppi di k elementi che si possono formare con n elementi.

$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{5040}{2(120)}=21$: da un gruppo di 7 elementi si possono formare 21 coppie.

Coefficiente multinomiale

$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}=\frac{n!}{k!\cdot\ldots\cdot k_r!}$ = numero di gruppi di diversi elementi (k_1, …, k_r) che si possono formare con n elementi.

$\binom{11}{1,4,4,2}=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{39916800}{1\cdot 24\cdot 24\cdot 2}=34650$: le lettere della parola *MISSISSIPPI* (1*M*, 4*I*, 4*S*, 2*P*) possono essere combinate in 34650 modi.

Distribuzioni statistiche

Distrib. semplici: *serie* (carattere qualitativo) e *seriazioni* (carattere quantitativo);

Frequenza assoluta: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1+n_2+\ldots+n_k=N$: n_i è il numero di unità statistiche che rappresentano la modalità i di un certo carattere.

Frequenza relativa: $f_i=\frac{n_i}{N}$ è il rapporto tra la frequenza assoluta n_i e il totale N: $\sum_{i=1}^{k} f_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{N}=\frac{n_1}{N}+\frac{n_2}{N}+\ldots+\frac{n_k}{N}=1$.

Divisione di una variabile in classi

Estremi (*min*, *max*): i valori numerici che indicano le classi (p. es. da 45 a 50, da 132 a 133).

Limiti o confini (inferiore e superiore): semisomma fra *max* di una classe e *min* della classe successiva (se c'è discontinuità tra gli estremi delle classi) $c.sup_i=\frac{max_{i-1}+min_i}{2}$, $c.inf_i=\frac{max_i+min_{i+1}}{2}$.

Ampiezza: differenza tra limite superiore e inferiore (*lim.sup–lim.inf*).

Valore centrale: semisomma tra limite inferiore e superiore $\frac{lim.sup_i+lim.inf_i}{2}$.

Media

Media aritmetica: per le modalità x_N di N unità statistiche, $M_a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$;

per le frequenze n di x, $M_a=\frac{x_1 n_1+x_2 n_2+\ldots+x_k n_k}{N}$;

$x_1 \leq M_a \leq x_N$.

Media aritmetica ponderata: $M_{a,pond}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$, f_i è il *peso* (ponderazione) assegnato alle modalità.

Media geometrica: $M_g=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$ i valori non si sommano, si moltiplicano (tassi di crescita).

Media geometrica ponderata: $M_{g,pond}=\sum_{i=1}^{N} \sqrt[f_i]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{f_i}}$.

Media armonica: $M_h=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$.

Media di potenza: $M^s=(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^s)^{\frac{1}{s}}$.

Scarti

Differenza tra modalità e media: $s_i=(x_i-M_a)$.

La somma degli scarti è nulla: $s_N=(x_1-M_a)+(x_2-Ma)+\ldots+(x_N-M_a)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M_a)=0$.

$M_a=\frac{5+7+8+4}{4}=6$ → s_1 = 5–6 = –1; s_2 = 7–6 = 1; s_3 = 8–6 = 2; s_4 = 4–6 = –2 →

$s_1+s_2+s_3+s_4$ = 1–1+2–2 = 0.

VARIANZA

$$\sigma=\sqrt{(x_1-M_a)^2+(x_2-Ma)^2+\ldots+(x_N-M_a)^2}\quad .$$

σ è l'indice di dispersione che esprime la varianza generale delle modalità dalla M_a, cioè quanto si discosta mediamente la sommatoria degli scarti dalla M_a. Più il valore di σ è elevato, più il divario degli estremi, rispetto alla M_a, è notevole.

Visto che la somma degli scarti è nulla, per ottenere un valore di riferimento (σ^2) si elevano gli scarti al quadrato, in modo che siano tutti positivi; si opera quindi la radice quadrata per ottenere un numero gestibile.